BASEL LANDSCHAFT

BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2021
Mathematik

Klasse: **4a**

Lehrer: **Markus Stähelin**

Anzahl Seiten (ohne Deckblatt): **5**

Anweisungen/ Erläuterungen: **Keine**

Hilfsmittel:
- **Taschenrechner TI 84 (grafikfähig), Speicher und Programme gelöscht**
- **Gelbe Formelsammlung DMK**

Hinweis zur Bewertung: **Für die Note sechs muss nicht die volle Punktzahl erreicht werden.**

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

1) **Kurvendiskussion** (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = t \cdot x + e^{-x}$$

mit dem Parameter $t > 0$.

a) f(x) ist auf Extremal - und Wendestellen (x-Koordinaten genügen) zu untersuchen. Für welche Werte von t hat die Funktion an der Stelle $x = 1$ eine Extremstelle? [3 P.]

b) Die Kurve von f(x) schneidet die y-Achse im Schnittpunkt S.

b1) Wie lautet die Tangentengleichung der Kurve von f(x) im Schnittpunkt S? [2 P.]

b2) In welchem Punkt Q schneidet die Normale in S die x-Achse? [2 P.]

b3) Für welchen Wert von t beträgt die Entfernung zwischen S und Q $\sqrt{5}$ Längeneinheiten? [2 P]

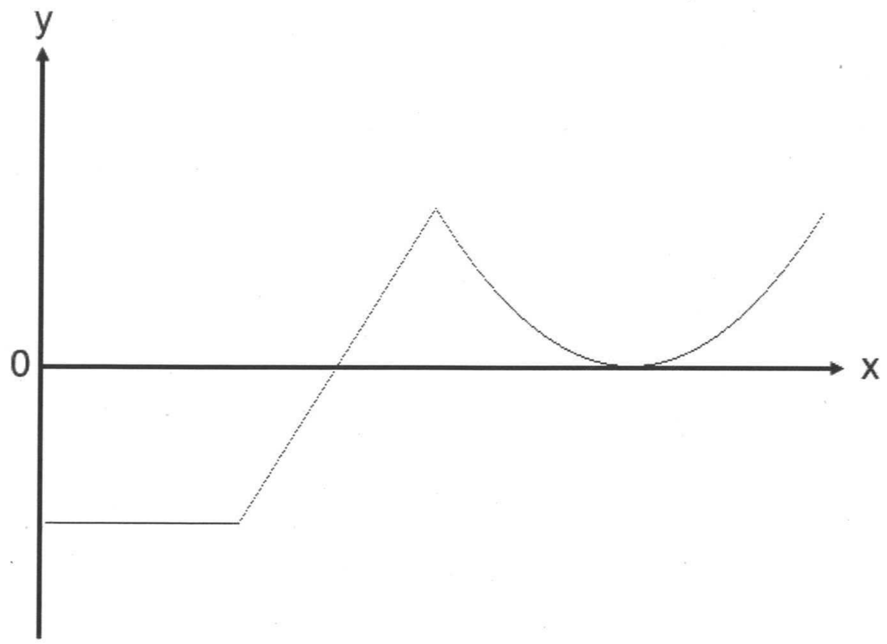
c) Die Kurve von f(x) mit $t = 2$, die Geraden $y = 2x$, $x = \ln 2$ und $x = b$ ($b > \ln 2$) schliessen eine Fläche A ein.

c1) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche A in Abhängigkeit von b. [2 P.]

c2) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{b \to \infty} A(b)$ [1 P.]

2) **Grafik einer Stammfunktion** (4 Punkte)

Gegeben ist der Graf der Funktion f. Skizzieren Sie möglichst exakt den Grafen einer zugehörigen Stammfunktion F. Sie können direkt in die Vorlage zeichnen. [4 P.]



3) Vektorgeometrie (14 Punkte)

Gegeben sind die windschiefen Geraden

g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

sowie die Punkte $M(-8|0|4)$, $A(-3|7|0)$ und $Z(4|12|4)$.

a) Zeigen Sie, dass g und h rechtwinklig zu einander stehen. [1P.]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf h liegt, und bestimmen Sie diejenige Gerade k, welche A enthält und senkrecht zu beiden Geraden g und h steht. [3 P.]

c) Zeigen Sie, dass die Gerade k die Gerade g schneidet, und geben Sie den Schnittpunkt P an. [2 P.]

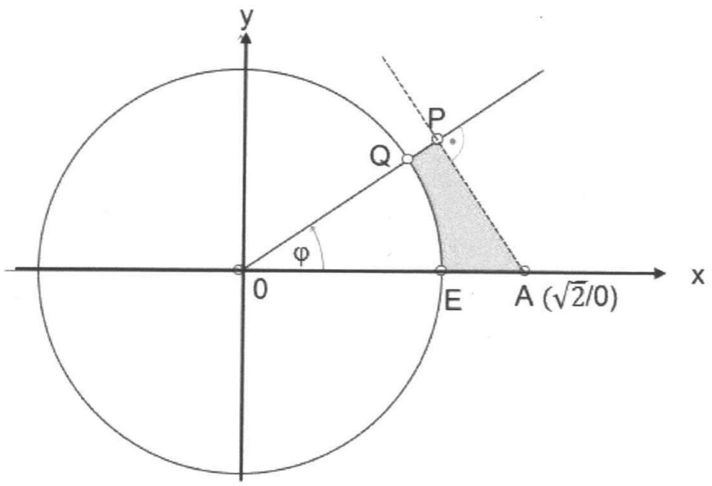
d) Es gibt verschiedene Möglichkeiten, einen Würfel so zwischen den Geraden zu platzieren, dass zwei seiner Eckpunkte auf g und zwei auf h liegen. Dabei gibt es den Fall, bei dem auf der einen Geraden eine **Kante**, auf der anderen Geraden eine **Flächendiagonale** des Würfels liegt. Skizzieren Sie diese Situation und berechnen Sie die Kantenlänge dieses Würfels. [2P.]

Wir betrachten nun die Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius 15.

e) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt (3|10|6) berührt. [2 P.]

f) Die Gerade g wird nun von Z aus beleuchtet und wirft dabei einen Schatten auf die Kugel K. Der Schatten ist Teil eines Kreises. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises. [4 P.]

4) **Extremwert** (9 Punkte)



Die obige Abbildung zeigt einen Strahl, der im Ursprung *O* beginnt und durch *Q* auf dem Einheitskreis verläuft. *Q* liegt im ersten Quadranten.

P ist der Fusspunkt des Lots, welches von A($\sqrt{2}$/0) auf den Strahl gefällt wird.

Der Winkel in O heisse φ $(0 \le \varphi \le \pi/2)$

a) Für welche Winkel φ befindet sich *P* **ausserhalb** des Einheitskreises? [2 P.]

b) Betrachten Sie den Fall, wo *P* ausserhalb des Einheitskreises liegt.

Für welchen Winkel φ ist der **Flächeninhalt** der Figur *EAPQ* am grössten? [7 P.]

5) **Kegelschnitt** (7 Punkte)

Gegeben sind der Punkt F(0|1) und die Gerade *g*: $y = -2$.

Wir betrachten die Menge aller Punkte P(*x*/*y*), für die gilt:

Die Entfernung von P zu F ist halb so gross wie der Abstand von P zur Geraden *g*,

d.h. $\overline{PF} = \frac{1}{2}$ d(P,g)

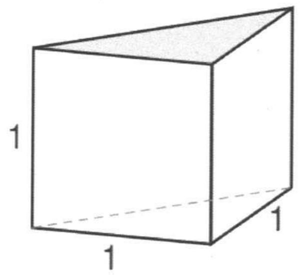
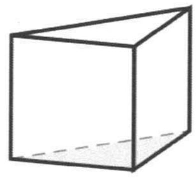
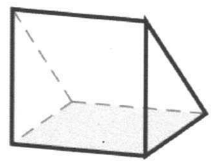
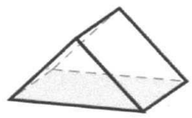
Diese Bedingung definiert einen Kegelschnitt.

Leiten Sie daraus eine Gleichung für den Kegelschnitt her. Bestimmen Sie

- im Fall einer Parabel: Scheitelpunkt, Brennpunkt und Leitlinie,
- im Fall einer Ellipse: Mittelpunkt und Brennpunkte,
- im Fall einer Hyperbel: Mittelpunkt, Brennpunkte und Asymptoten.

6) Stochastik (8 Punkte)

Wir betrachten Holzklötzchen, welche die folgende Form haben: Die Grundfläche ist ein gerades Prisma mit rechtwinklig-gleichschenkliger Grundfläche und Schenkellänge 1; die Höhe des Prismas beträgt 1.

	«Dreieck»	«Quadrat»	«Rechteck»
			

Ein solches Klötzchen kann beim Wurf auf eine der Dreiecksflächen, auf eine der Quadratflächen oder auf die Rechtecksfläche zu liegen kommen.
Wir bezeichnen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit
p(Dreieck), p(Quadrat) bzw. p(Rechteck).

a) Zunächst nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeiten proportional zu den Flächeninhalten der Seitenflächen sind.
Berechnen Sie unter dieser Annahme p(Dreieck), p(Quadrat) und p(Rechteck) exakt. [2 P.]

Erste Versuche lassen vermuten, dass genähert gilt:

$$p(\text{Dreieck}) = 0.2 \quad p(\text{Quadrat}) = 0.5 \quad p(\text{Rechteck}) = 0.3$$

Verwenden Sie diese Wahrscheinlichkeiten in den folgenden Teilaufgaben.

b) Es werden drei Klötzchen geworfen. Berechnen Sie daraus die Wahrscheinlichkeit, mit der

b1) alle drei Klötzchen auf den gleichen Flächen liegen, [1 P.]

b2) alle drei Klötzchen auf verschiedenen Flächen liegen. [1 P.]

c) Zwei Klötzchen werden geworfen, und beide liegen auf einer viereckigen Seite.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt eins der Klötzchen auf einem Quadrat und das andere auf dem Rechteck? [2 P.]

d) 12 Klötzchen werden geworfen, und wir zählen, wie oft jede Art Fläche im Wurf vorkommt. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? [2 P.]

7) Corona - Impfstoff (4 Punkte)

Die Wirksamkeit des Impfstoffs der Firma Moderna wurde an 30350 Studienteilnehmenden untersucht. Die eine Hälfte bekam den Impfstoff (mRNA-1273), die andere Hälfte ein unwirksames Placebo.

Aus den Infektionen in der Placebo-Gruppe lässt sich ableiten, dass ohne Impfung die Wahrscheinlichkeit für eine Infektion während der beobachteten Zeit bei 1.22 % liegt.

a) Bei einer Wirksamkeit von w = 90%: Wie viele Infektionen würde man in der geimpften Gruppe erwarten? [1 P.]

In der geimpften Gruppe kam es zu nur 11 Fällen.

b) H_0 sei die Hypothese w = 90%
Untersuchen Sie mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von α = 5% die später dann publizierte Hypothese H_1: Der Impfstoff hat eine Wirkung von über 90 %. Geben Sie auch den Verwerfungsbereich an. [3 P.]

8) Induktionsbeweis (4 Punkte)

Beweisen sie folgende Aussage mit vollständiger Induktion:

«$5^n + 7$ ist durch 4 teilbar» (für n = 1, 2, 3, ...)

9) Komplexe Folgen (6 Punkte)

Wir betrachten die komplexe Folge

$$z_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n-1}, \quad n = 1,2,3,...$$

a) Berechnen Sie die ersten 4 Glieder sowohl in Normal- als auch in Polarform. [3 P.]
b) **Zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen** Zahlenebene ein [1 P.]
c) Was lässt sich über die Lage aller weiteren Folgenglieder in der Gauss'schen Zahlenebene sagen? [2 P.]