BASEL
LANDSCHAFT
BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2021
Mathematik Grundlagenfach

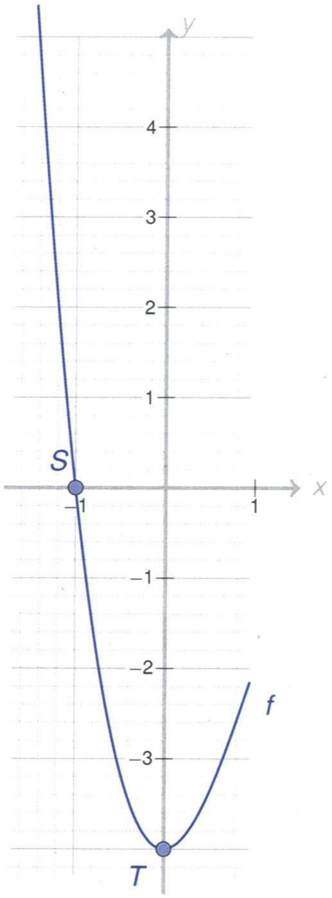
Klasse / Kurs:	4c, 4d, 4e, 4f, 4g, 4h, 4i
Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	8
Inhalt:	Schriftliche Abschlussprüfung 2021 in Mathematik / Grundlagenfach, bestehend aus 8 Prüfungsfragen
Anweisungen/ Erläuterungen:	Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer **neuen Seite**.
Hilfsmittel:	Wissenschaftlicher Taschenrechner **ohne** Grafikfunktionen TI-30X Pro MultiView Formelsammlung Mathematik **kompakt** (Adrian Wetzel / ISBN 978-3-9523907-5-7)
Bewertung:	Die total erreichbare Punktzahl beträgt **61** Punkte Die Punktzahlen der einzelnen Aufgaben sind angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1: 4+3.5=**7.5** Punkte

Der folgende Graph gehört zu einer Polynomfunktion f mit

$$f(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$$



Die Punkte S und T weisen ganzzahlige Koordinaten auf, die aus der Abbildung abgelesen werden dürfen.
T ist ein Tiefpunkt des Graphen.

a) Bestimmen Sie die mit Hilfe der gegebenen Punkte die Funktionsgleichung von f.

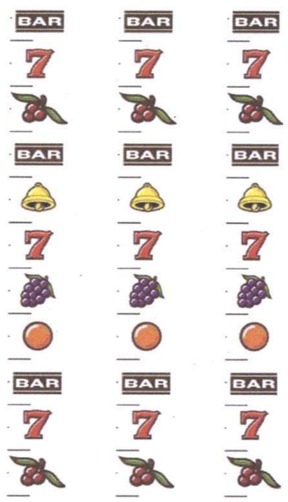
*(Falls Sie **a)** nicht lösen können, rechnen Sie stattdessen mit der Ersatzfunktion $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 32$ weiter.)*

b) Bestimmen Sie die Wendestelle und die Koordinaten des fehlenden Hoch- oder Tiefpunkts von f. Geben Sie an, ob es sich dabei um einen Hoch- oder einen Tiefpunkt handelt.

Aufgabe 2: 1.5+1.5+1+2+2=**8** Punkte

Ein einarmiger Bandit (Englisch: Slot Machine) ist ein Glücksspielautomat, in dem sich drei mit Symbolen beschriftete Walzen drehen, bis sie in einer zufälligen Position zum Stillstand kommen. Es gibt verschiedene Gewinnkombinationen – wir betrachten hier nur den **Hauptgewinn**, für den **jede Walze auf der Position "7"** stehen bleiben muss.
Die drei Walzen sind identisch. Jede Walze hat 11 Plätze und trägt die folgenden Symbole:

Walze 1 Walze 2 Walze 3



a) Wie viele **verschieden aussehende** Symbolkombinationen gibt es?

b) Wie viele **verschieden aussehende** Symbolkombinationen mit **drei unterschiedlichen** Symbolen gibt es?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Walzen auf einer "7" stehenbleiben?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens ein "BAR"-Symbol zu bekommen?

Alle bisherigen Berechnungen beruhen auf der Annahme, dass jedes der 11 Symbole mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt. Diese Annahme ist erwiesenermassen falsch:
Ein Bremsmechanismus (US-Patent 4,448,419 aus dem Jahr 1984) steuert jede Walze im Hintergrund so, dass sie bei zwei ihrer "7"-er-Symbole gar nie anhält; beim dritten "7"-er-Symbol hält sie nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{32}$ an.

e) Arglose Spieler glauben, sie würden mit der in Teilaufgabe **c)** berechneten Wahrscheinlichkeit gewinnen.
In Wirklichkeit sind die Chancen wesentlich schlechter. Berechnen Sie, **um welchen Faktor** die Chancen schlechter sind.

Aufgabe 3: 3.5+2.5=**6** Punkte

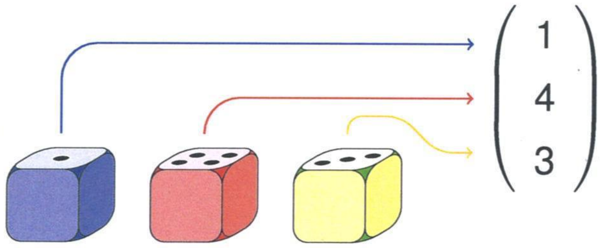
Gegeben ist die Gerade g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}),$

ausserdem die Punkte $A(5|-2|13)$ und $C(17|2|10)$.

a) Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit rechtem Winkel bei der Ecke A.
B liegt auf der Geraden g.
Berechnen Sie die Koordinaten von B.

b) Der Punkt $P(5|6|17)$ liegt ebenfalls auf der Geraden g.
Ein regulärer Spielwürfel wird 3 Mal geworfen, um so einen Vektor $\vec{v}$ zu bestimmen.

Beispiel:



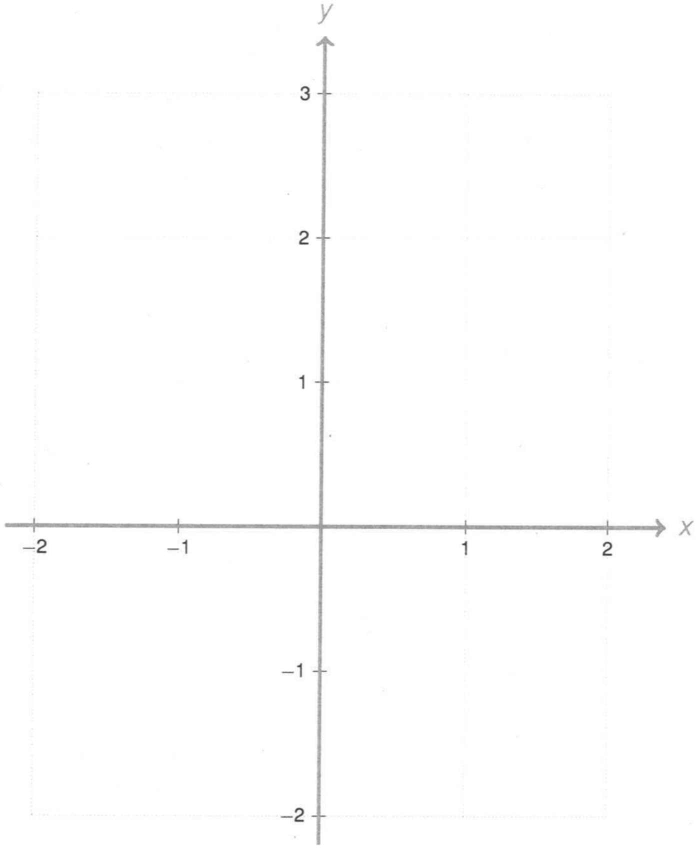
Anschliessend wird der Punkt P um diesen Vektor $\vec{v}$ verschoben.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der verschobene Punkt P' wieder auf der Geraden g liegt.

Aufgabe 4: 2+2.5+3=**7.5** Punkte

Wir betrachten die Funktion f, die durch $f(x) = e^{-x}$ definiert ist. Weiter ist $g\colon y = x + 1$ eine Gerade.

a) Zeichnen Sie den Graphen von f und die Gerade g ins vorgedruckte Koordinatensystem auf diesem Blatt.

▷*Alternativ dürfen Sie den Graphen und die Gerade auch in gleicher Grösse auf Ihr Antwortblatt zeichnen.*



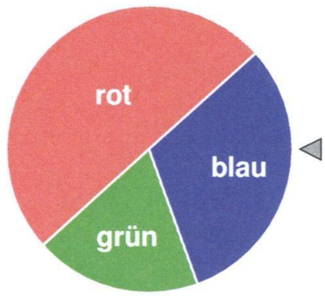
b) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Gerade g und der Graph von f beide durch den Punkt $P(0|1)$ gehen und sich in diesem Punkt rechtwinklig schneiden.

c) Die x-Achse, die Gerade g und der Graph der Funktion f schliessen ein nach rechts unbegrenztes Flächenstück ein. Dieses Flächenstück wird von der y-Achse in zwei Teile geteilt. In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte der beiden Flächenstücke zueinander?

Aufgabe 5:

3+2+1.5=**6.5** Punkte

Sie sehen rechts ein Glücksrad mit drei Feldern:
Das **rote** Feld deckt das **halbe** Glücksrad ab,
also ist $P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$.



Die Wahrscheinlichkeiten der anderen Ergebnisse, $P(\text{grün})$ bzw. $P(\text{blau})$, sind vorerst unbekannt.

Dafür ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E "zwei gleiche Farben bei zweimaligem Drehen des Glücksrades" gegeben:

$$P(E) = \frac{7}{18}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\text{grün})$ und $P(\text{blau})$ für einmaliges Drehen.
▷*Achtung: die Abbildung ist symbolisch; das blaue Feld ist aber grösser als das grüne Feld*

*(Falls Sie **a)** nicht berechnen konnten, rechnen Sie mit* $P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$, $P(\text{grün}) = \frac{1}{8}$, $P(\text{blau}) = \frac{3}{8}$ *weiter.)*

b) Sie werden nun zu einem Spiel mit diesem Glücksrad eingeladen. Der Einsatz für jede Spielrunde (einmal drehen) ist CHF 3.–

Es gelten folgende Regeln:

rot: Sie verlieren Ihren Einsatz
blau: Sie erhalten den Einsatz zurück und gewinnen zusätzlich CHF 1.–
grün: Sie erhalten den Einsatz zurück und gewinnen zusätzlich CHF 3.–

Würden Sie bei diesem Spiel mitmachen? (Begründen Sie Ihre Antwort)

c) Sie drehen das Glücksrad 100 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Glücksrad mindestens 20 Mal auf dem grünen Feld anhält?

Aufgabe 6: 2+4.5=**6.5** Punkte

Gegeben ist die Parabel p durch die Gleichung $p(x) = -x^2 + 8$ und die beiden unbeweglichen Punkte $A(-1|0)$ und $B(1|0)$.

Die Punkte C und D liegen auf der Parabel p, so dass das Viereck $ABCD$ ein Trapez bildet, das symmetrisch zur y-Achse ist (vgl. Abbildung).

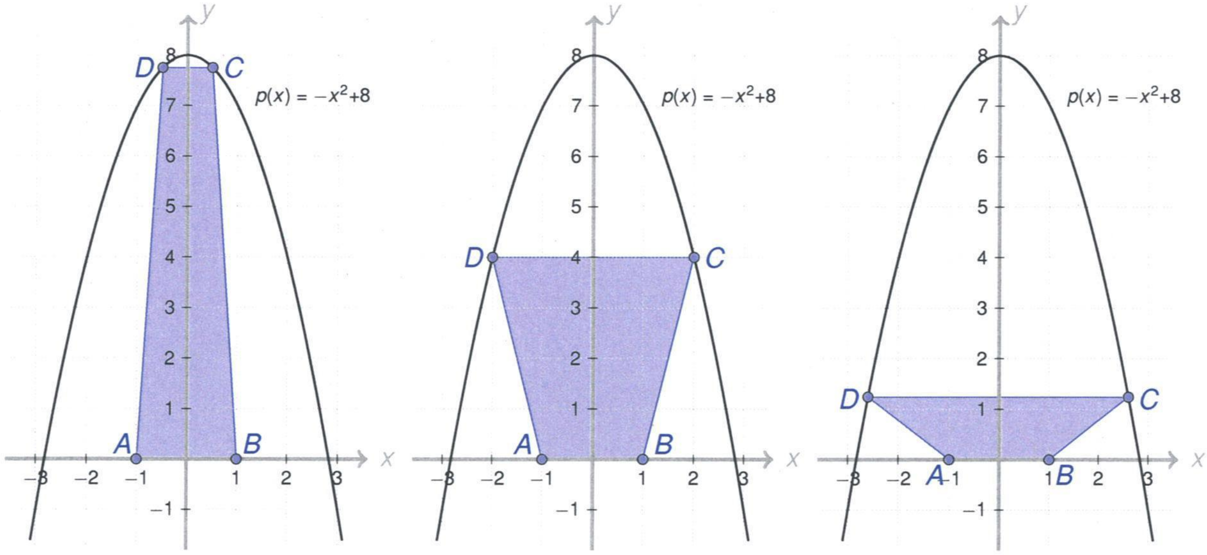


Abbildung: Drei verschiedene Trapeze, je nach Lage der Punkte C und D.

a) Berechnen Sie zuerst die Fläche des Trapezes $ABCD$ für $C(2|4)$ und $D(-2|4)$ (vgl. mittleres Bild in der Abbildung).

b) Die Punkte C und D dürfen sich nun auf der Parabel bewegen, aber nur so, dass das Viereck $ABCD$ weiterhin ein zur y-Achse symmetrisches Trapez oberhalb von der x-Achse bildet. Berechnen Sie den maximal möglichen Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$.

Aufgabe 7: 2+3+2+4=**11** Punkte

Gegeben sind der Punkt M mit

$$M(3|-6|6),$$

die Gerade g mit

$$g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

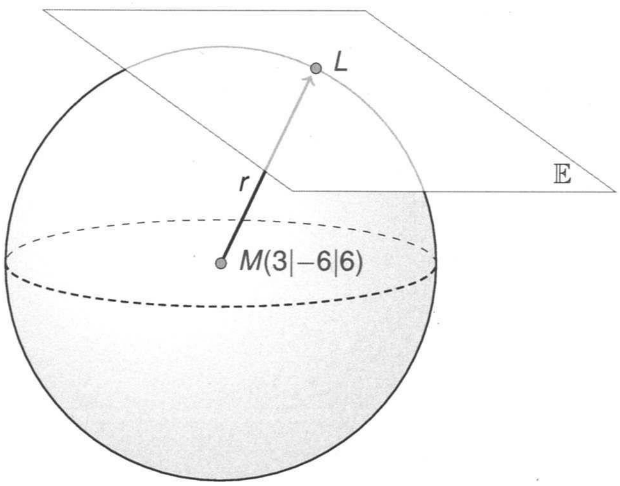
sowie die Ebene $\mathbb{E}$ mit

$$\mathbb{E}: 2x - 2y + z - 6 = 0.$$

a) Die Gerade g schneidet die Ebene $\mathbb{E}$. Berechnen Sie den Schnitt**winkel**.

b) Berechnen Sie den Abstand r des Punktes M von der Ebene $\mathbb{E}$ sowie den Lotfusspunkt L.

M sei der Mittelpunkt einer Kugel $\mathcal{K}$. L sei ein Punkt auf der Kugeloberfläche.



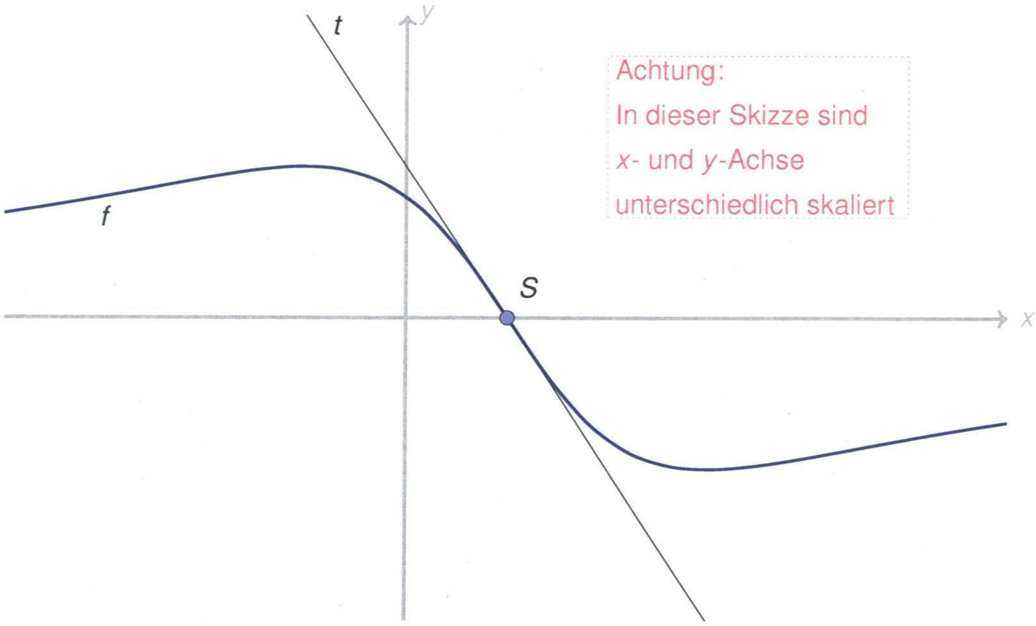
▷ *Die folgenden Teilaufgaben können auch unabhängig von **a)** und **b)** gelöst werden, wenn Sie für den Kugelradius $r = 6$ annehmen.*

c) Welcher Punkt P auf der Kugeloberfläche liegt am nächsten am Ursprung $O(0|0|0)$?

d) Die Gerade g schneidet die Kugel $\mathcal{K}$ in zwei Punkten G und H.
Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Aufgabe 8: 1+3+2+2=**8** Punkte

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \dfrac{1-x}{x^2-2x+5}$, die für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist (siehe Skizze):



a) Bestimmen Sie den Schnittpunkt S des Graphen von f mit der x-Achse.

b) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f im Punkt S.

c) Zeigen Sie, dass $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - 2x + 5)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

d) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die vom Graphen von f und der positiven x- und y-Achse begrenzt wird. Geben Sie das Resultat **exakt** an.