

Maturprüfung 2020

Mathematik - Grundlagenfach

Klasse / Kurs:	4b / 4c / 4d / 4e / 4f / 4g / 4h / 4i
Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	4
Inhalt:	Maturprüfung 2020 Mathematik schriftlich, Grundlagenfach
Anweisungen/ Erläuterungen:	Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt
Hilfsmittel:	Formelsammlung Mathematik kompakt (deutsch oder englisch) (Adrian Wetzel / ISBN: 978-3-9523907-5-7) Taschenrechner TI83, TI83+, TI84+, TI84+ Silver Edition, TI84+ CE-T
Bewertung:	Maximal 75 Punkte. Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.
Beilage:	Taschenrechnerbestimmungen Gymnasium Oberwil

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Mathematik Grundlagenfach**1. 7 + 7 + 2 = 16 Punkte**

- a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 18x$.
Berechnen Sie die Nullstellen, die Hoch- und Tiefpunkte und die Wendestellen der Funktion f . Weisen Sie nach, um welche Art Extremum es sich jeweils handelt.

Polynomfunktionen der Art $H(t) = At^3 + Bt^2 + Ct + D$ können zur Modellierung von Wachstumsphänomenen verwendet werden.

Wir betrachten im Folgenden das Wachstum einer Europäischen Lärche (*Larix decidua*). t ist dabei die Zeit in Jahren, $H(t)$ die Höhe der Lärche in m .

- b) Eine bestimmte Lärche sei zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) $1 m$ hoch und wächst zu diesem Zeitpunkt mit einer Geschwindigkeit von $0.5 m$ pro Jahr. Nach 10 Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkeit maximal und die Lärche ist $20 m$ hoch.
Bestimmen Sie mit diesen Angaben die Funktion $H(t)$.

Für die Teilaufgabe c) darf der TI-84 unbegrenzt eingesetzt werden!

Falls Sie Teilaufgabe b) nicht lösen können, verwenden Sie die Funktion
 $H(t) = -0.01t^3 + 0.28t^2 + 0.4t + 2$.

- c) Für welchen Bereich von t modelliert $H(t)$ das Wachstum der Lärche sinnvoll?
Begründen Sie Ihre Antwort in Worten.

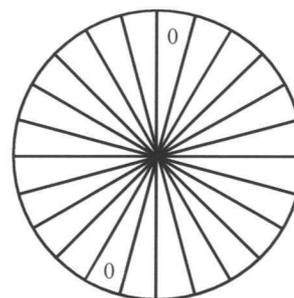
2. 2 + 2 + 2 + 2 + 3 = 11 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(2 | 0 | 1)$, $B(4 | 4 | -3)$ und $C(12 | 8 | 5)$.

- a) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist.
- b) Zeigen Sie, dass das Viereck $ABCD$ sogar ein Rechteck ist.
- c) Berechnen Sie den Winkel zwischen der Seite AB und der Diagonalen AC dieses Rechtecks.
- d) Finden Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der das Rechteck liegt.
- e) Das Rechteck $ABCD$ ist die Grundfläche einer geraden Pyramide, deren Spitze S in der xy -Ebene liegt. Berechnen Sie die Koordinaten der Spitze S der Pyramide.

3. $2 + 8 + 2 + 4 = 16$ Punkte

Gegeben ist ein Glücksrad mit 24 gleich grossen Sektoren. Zwei der Sektoren sind bereits mit der Zahl 0 beschriftet. Die restlichen 22 Sektoren sollen nun mit den Zahlen 1, 4 und 5 beschriftet werden. (vgl. Abbildung)



- a) Wie viele Möglichkeiten gibt es, das nebenstehende Glücksrad zu beschriften, wenn vierzehnmal die Zahl 1, sechsmal die Zahl 4 und zweimal die Zahl 5 eingesetzt wird? (vgl. Tabelle)

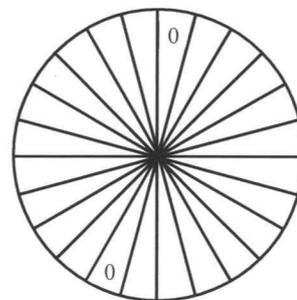
Für die folgenden Teilaufgaben betrachten wir nun ein solches Glücksrad (vgl. Tabelle):

- b) Sie drehen das Glücksrad **dreimal**. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

- i) Sie drehen keine 4.
- ii) Sie drehen drei gleiche Zahlen.
- iii) Sie drehen mindestens zweimal die Zahl 1.
- iv) Die Summe aller gedrehten Zahlen ist 6.

Zahl	Anz. Sektoren
0	2
1	14
4	6
5	2

- c) Sie spielen ein Spiel mit dem obigen Glücksrad. Um das Glücksrad **einmal** drehen zu dürfen, muss ein Spieler CHF 3.- bezahlen. Der Spieler bekommt anschliessend so viele Franken ausbezahlt, wie die Zahl anzeigt, auf welcher das Glücksrad zu stehen kommt. Mit welchem mittleren Gewinn oder Verlust pro Spiel kann der Spieler rechnen?
- d) Nun sollen die Sektoren im rechts abgebildeten Glücksrad mit den Zahlen 1, 4 und 5 neu beschriftet werden. Es müssen dabei folgende 3 Regeln beachtet werden:

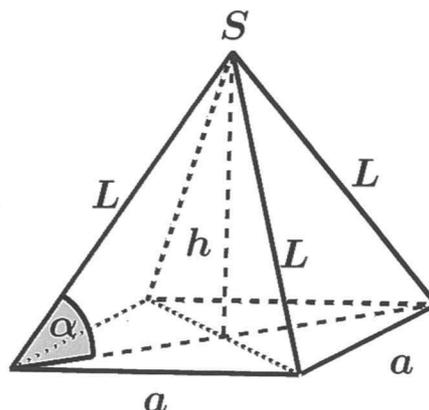


- I Ein Spieler zahlt CHF 3.-- Einsatz, um das Glücksrad einmal drehen zu dürfen.
- II Ein Spieler dreht einmal und bekommt so viele Franken ausbezahlt, wie die Zahl anzeigt, auf welcher das Glücksrad zu stehen kommt.
- III Es müssen doppelt so viele Felder mit der Zahl 4 wie mit der Zahl 5 beschriftet sein.

Berechnen Sie wie viele Sektoren mit jeder Zahl beschriftet werden müssen, damit das Spiel fair ist. (Lösen durch Ausprobieren gibt nicht die volle Punktzahl.)

4. 4 + 5 = 9 Punkte

Im Pfadfinderlager soll ein Zelt aus 4 Stangen von jeweils der Länge $L = 3\text{ m}$ in Form einer geraden quadratischen Pyramide mit der Basislänge a aufgebaut werden, die sich in der Spitze S treffen.



- a) Berechnen Sie das Volumen des Zelts für den Fall, dass die Höhe $h = 1.8\text{ m}$ ist. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Seitenlänge a des Grundquadrats sowie den Winkel α .
- b) Bestimmen Sie die Höhe h , für die das Volumen des Zelts maximal wird, und berechnen Sie dieses maximale Zeltvolumen.

5. 3.5 + 1 + 3 + 5.5 = 13 Punkte

Gegeben ist die Funktion f durch die folgende Funktionsgleichung $f(x) = e \cdot x + e^{-x}$

Mit e ist die Eulersche Zahl gemeint.

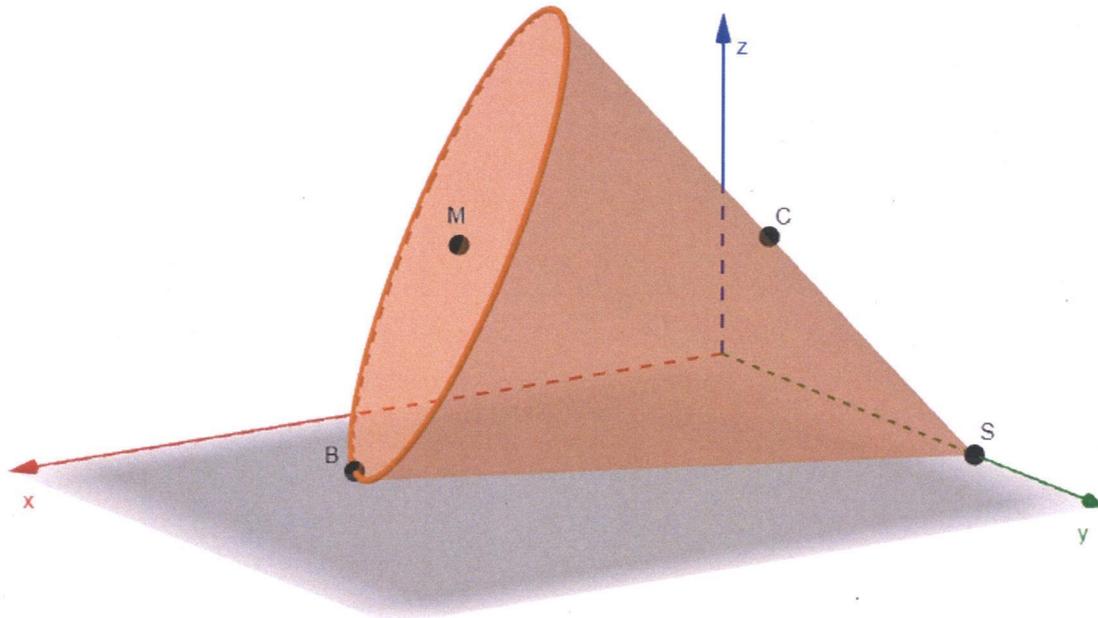
- a) Berechnen Sie den Extrempunkt des Graphen von f . Weisen Sie nach, um welche Art Extremum es sich handelt.
- b) Begründen Sie, weshalb der Graph von f keinen Wendepunkt hat.
- c) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f bei $x = -2$ **exakt**.

Wenn Sie Teilaufgabe c) nicht lösen können, dann rechnen Sie mit der Tangente $g: y = (e - e^3) \cdot x - 2e^3$ an den Graphen von f bei $x = -3$ weiter.

- d) Der Graph von f , die Tangente t (bzw. die Ersatzlösung g) und die y -Achse schliessen eine endliche Fläche ein. Skizzieren Sie die Situation und markieren Sie darin diese Fläche. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche **exakt**.

6. $1.5 + 1.5 + 2.5 + 4.5 = 10$ Punkte

Gegeben ist ein auf der xy -Ebene liegender gerader Kreiskegel mit Kegelspitze $S(0 \mid 10 \mid 0)$ und Mittelpunkt der Grundkreisfläche $M(10 \mid 5 \mid 5)$.



- Bestimmen Sie eine Parametrgleichung der Geraden durch die Punkte M und S.
- Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E, in welcher die Grundfläche des Kegels liegt.

Falls Sie die Teilaufgabe b) nicht lösen können, dürfen Sie im Weiteren die (falsche) Ersatzlösung $E: 10x - 5y + 6z - 100 = 0$ verwenden.

- Der Punkt B liegt auf dem Rand des Grundkreises und in der xy -Ebene. Berechnen Sie die Koordinaten von B.
- Der Punkt $C(4 \mid 8 \mid 5)$ liegt auf dem Kegelmantel. Gesucht ist die Ebene T, die den Kegel entlang der Mantellinie durch S und C berührt. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von T.

Einsatz des offiziellen Taschenrechners an der schriftlichen Matur

GRUNDSATZ: ALLE MATHEMATISCH ENTSCHEIDENDEN SCHRITTE UND
UMFORMUNGEN MÜSSEN INNERHALB DES AUFGEZEIGTEN
LÖSUNGSWEGS NACHVOLLZIEHBAR SEIN.

Unter Berücksichtigung dieses Grundsatzes darf der Taschenrechner wie folgt eingesetzt werden:

- **Gleichungen**

Gleichungen und Gleichungssysteme müssen **von Hand** nach der oder den Unbekannten aufgelöst werden. D.h. zum Beispiel, dass Sie zeigen müssen, wie Sie in die Lösungsformel der quadratischen Gleichung einsetzen.

- **Analysis**

Nullstellen, Steigungen von Tangenten, lokale Extrema, Wendepunkte, Schnittpunkte von Graphen und Integrale sind **grundsätzlich von Hand** und wenn gefordert, exakt zu bestimmen. Bei Integralen müssen die Stammfunktion sowie die Werte, die Sie erhalten, wenn Sie die obere und untere Grenze einsetzen, notiert werden.

- **Stochastik**

Bei der Binomialverteilung muss die verwendete Formel auf dem Blatt notiert sein. (z.B. $\text{binompdf}(100,0.5,10)$).

Der Taschenrechner darf aber zur Kontrolle eingesetzt werden. Insbesondere ist es sinnvoll, den Graphen einer Funktion mit Hilfe des Taschenrechners zu visualisieren.

Weitere Punkte:

- Die Schülerinnen und Schüler sind selber dafür verantwortlich, dass vor der Prüfung in ihrem Taschenrechner der Speicherinhalt gelöscht ist (inklusive Programme und Applets).
- Nur der offizielle Taschenrechner ist an der Matur zugelassen.
- Das Handbuch des Taschenrechners darf nicht benutzt werden.