BASEL LANDSCHAFT
BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2019
Mathematik Grundlagenfach

Klasse / Kurs:	4a_glf, 4b_glf, 4c, 4d, 4e, 4f, 4g, 4h, 4i
Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	4
Inhalt:	Schriftliche Abschlussprüfung 2019 in Mathematik / Grundlagenfach, bestehend aus 6 Prüfungsfragen
Anweisungen/ Erläuterungen:	Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer **neuen Seite**.
Hilfsmittel:	grafikfähiger Taschenrechner TI82Stats, TI83, TI83+, TI84+, TI84+Silver Edition, TI84+ CE-T Formelsammlung Mathematik **kompakt** (Adrian Wetzel / ISBN 978-3-9523907-5-7)
Bewertung:	Die total erreichbare Punktzahl beträgt 79 Punkte Die Punktzahlen der einzelnen Aufgaben sind angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Hiermit bestätige ich anhand des mir vorgelegenen Exemplars, dass die Prüfung korrekt und mit allen Unterlagen versehen, ausgefertigt ist.

6. Mai 2019

Datum, Unterschrift (AD)

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1:

3+1+3+2+4= **13** Punkte

Ein Quader *ABCDEFGH* mit quadratischer Grundfläche *ABCD* steht auf der *xy*-Ebene. Wir kennen die Ecken *B*, *C* und *G* sowie den Mittelpunkt *M* des Bodenquadrats *ABCD*:

$$B(7|5|0) \qquad C(4|8|0) \qquad M(4|5|0) \qquad G(4|8|10)$$

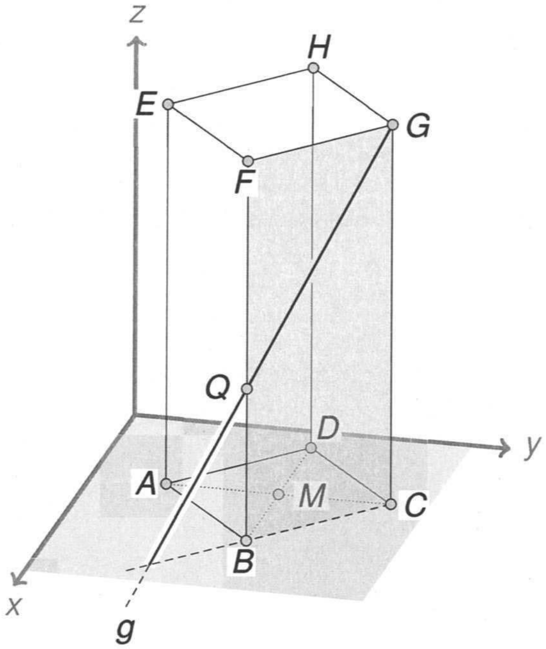
a) Bestimmen Sie die Eckpunkte *A*, *D* und *E*.

b) Welche Kantenlänge hat das Bodenquadrat *ABCD*?

c) Entlang der Seitenfläche *BCGF* verläuft eine Gerade *g*; sie hat die Richtung $\vec{v}$.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In welchem Punkt *Q* auf der Kante $\overline{BF}$ verlässt die Gerade *g* die Seitenfläche des Quaders?



d) Berechnen Sie den Neigungswinkel φ der Geraden *g* bezüglich der *xy*-Ebene.

e) Vom Punkt *E* aus wird das Lot auf die Gerade *g* gefällt.
Berechnen Sie den Lotfusspunkt L_g und den Abstand des Punktes *E* von der Geraden *g*.

Aufgabe 2:

7+2+3+3= **15** Punkte

Gegeben ist die Funktion *f* mit

$$y = f(x) = \frac{4x-4}{x^2} = \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$$

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und berechnen Sie den Schnittpunkt des Graphen von *f* mit der *x*-Achse, allfällige Hoch- und Tiefpunkte und den Wendepunkt der Funktion *f*.
▷ *Der Nachweis, dass es sich wirklich um einen Wendepunkt handelt, wird nicht verlangt.*

b) Geben Sie die vertikale und die horizontale Asymptote des Graphen von *f* an.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente *t* an den Graphen der Funktion *f* an der Stelle $x = \frac{3}{2}$.

d) Die Horizontale im Hochpunkt von *f*, der Graph der Funktion *f*, die *x*- und die *y*-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche *A*, die nicht ins Unendliche reicht. Fertigen Sie eine Skizze an, markieren Sie die beschriebene Fläche *A* und berechnen Sie deren Inhalt **exakt**.

Aufgabe 3:

2+3+2+3+2+3= **15** Punkte

Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Ecken $A(1|8|2)$, $B(7|-16|-4)$ und $C(1|-10|20)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

b) Der Punkt P ergänzt das Dreieck ABC zu einem Rhombus. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Lage von P? ▷*Begründung mit Skizze*
Berechnen Sie die Koordinaten für **einen** der möglichen Punkte P.

c) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ABC.

d) Berechnen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene $\mathbb{E}$ durch die Punkte A, B und C.

e) Beschreiben Sie in Worten, wo alle Punkte liegen, welche den gleichen Abstand von den Ecken des gleichseitigen Dreiecks ABC haben.

f) Der Punkt Q hat von den Punkten A, B und C den Abstand 18.
Berechnen Sie seine Koordinaten. ▷***Eine** Lösung genügt.*

Aufgabe 4:

1+2+3+3+3= **12** Punkte

Unter den 900 Schülerinnen und Schülern des Gym Oberwil verbreitet sich ein Gerücht. Die Verbreitung des Gerüchts soll mit einem mathematischen Modell beschrieben werden: Eine Funktion $K(t)$ bezeichnet die Anzahl Personen, die das Gerücht zur Zeit t bereits kennen. Dabei wird t in Tagen angegeben.

$$K(t) = \frac{900}{1 + 899 \cdot e^{-0.5 \cdot t}}$$

a) Berechnen Sie die Anzahl Personen, welche das Gerücht nach 5 Tagen (d.h. zur Zeit $t = 5$) kennen.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem 600 Personen das Gerücht kennen.

c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für den Bereich $0 \leq t \leq 36$.
▷*Sie dürfen die Grafikfunktionen Ihres Taschenrechners benutzen.*
Bestimmen Sie den Wert, gegen den $K(t)$ für $t \to \infty$ strebt.
Erklären Sie in einigen Worten, was dieser Zahlenwert für eine Bedeutung hat.

d) Berechnen Sie die erste Ableitung $K'(t)$.
Erklären Sie in einigen Worten, was die erste Ableitung in diesem Beispiel für eine Bedeutung hat.

e) Die Funktion $K(t)$ wächst zu Beginn (im Zeitintervall $0 \leq t \leq 10$) näherungsweise exponentiell.
Finden Sie eine einfachere Funktion $N(t)$ von der Form

$$N(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$

welche folgende Eigenschaften hat:

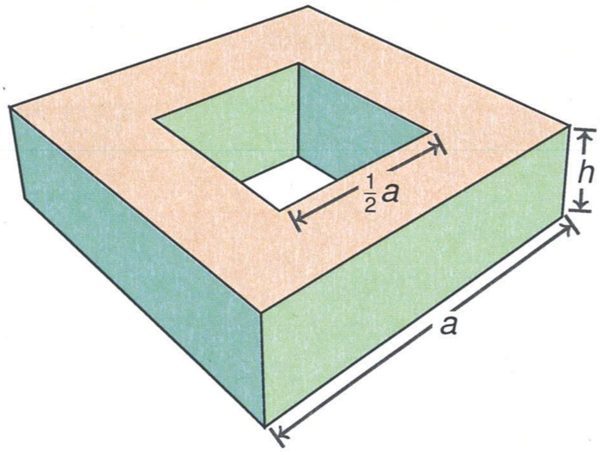
- Zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ stimmen die Funktionswerte von $K(t)$ und $N(t)$ überein.
- Zum Zeitpunkt $\boldsymbol{t = 0}$ stimmen die ersten Ableitungen, $K'(t)$ und $N'(t)$, überein.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von $N(t)$.
*(Falls Sie Teilaufgabe **d)** nicht lösen konnten, rechnen Sie mit $K'(0) = 0.6$)*

Aufgabe 5:

4+6= **10** Punkte

Ein quaderförmiges Bürogebäude hat einen quadratischen Grundriss und einen quadratischen Lichthof im Innern. Das Volumen des Bürogebäudes (ohne Innenhof) soll 2592 m^3 betragen.

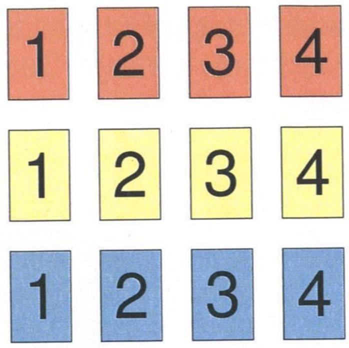


a) Der Architekt entscheidet zunächst, dass die Seitenlänge a des Gebäudes 20 m betragen soll. Um die Wärmeabstrahlung des Gebäudes abschätzen zu können, berechnet er nun die gesamte Oberfläche des Gebäudes (ohne seine Bodenfläche).
Berechnen Sie die Höhe des Gebäudes und seine Oberfläche.

b) Um möglichst wenig Wärmeenergieverlust zu haben, *verwirft* der Architekt seine ursprüngliche Entscheidung bezüglich der Seitenlänge und verfolgt nun mit oberster Priorität das Ziel, die Oberfläche des Gebäudes (ohne seine Bodenfläche) zu **minimieren**.
Wie muss in diesem Fall die Breite a und die Höhe h des Quaders gewählt werden, und wie gross ist die minimale Oberfläche? (Das ursprüngliche Gebäudevolumen von 2592 m^3 soll beibehalten werden.)

Aufgabe 6:

2+2+2+4+2+2= **14** Punkte



Gegeben sind 12 Karten, welche mit den Zahlen von 1 bis 4 beschriftet sind. Dabei kommt jede Zahl dreimal vor und zwar je einmal in rot, gelb und blau. Die Karten werden gemischt. Albin zieht nun drei Karten **ohne Zurücklegen** und legt sie nacheinander auf den Tisch.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

a) Alle drei Karten sind gleichfarbig.

b) Mindestens eine der drei Zahlen ist gerade.

c) Die drei Zahlen bilden eine aufsteigende Zahlenfolge.
▷ *Das soll heissen: Die zweite Zahl ist grösser als die erste, und die dritte Zahl ist grösser als die zweite.*

Albin bietet Bernd folgendes Spiel an:

Für 5 Franken Einsatz darf Bernd so oft eine Karte ziehen, bis eine Wiederholung auftritt, also eine **Farbe** oder eine **Zahl** zum zweiten Mal gezogen wird.
Für jede gezogene Karte (einschliesslich der letzten) erhält Bernd 2 Franken.

d) Mit welchem Gewinn pro Spiel darf Bernd rechnen?

e) Bernd hat sich dazu entschlossen, das Spiel mitzumachen.
Er hat aber Pech: Bereits bei der zweiten Karte tritt eine Wiederholung auf.
Wie gross ist unter diesen Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, dass sich die **Farbe** wiederholt hat?

Bernd zieht nun eine Karte, **legt sie wieder zurück** und mischt anschliessend das Kartenspiel. Dieser Vorgang wird 12-mal wiederholt.

f) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er dabei **mindestens** 5-mal eine 2 gezogen hat?