BASEL
LANDSCHAFT

BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2018
Mathematik - Grundlagenfach

Klasse / Kurs:	4b / 4c / 4d / 4e / 4f / 4g / 4h / 4i
Anzahl Seiten (ohne Deckblatt):	5
Inhalt:	Maturitätsprüfung 2018 Mathematik schriftlich, Grundlagenfach
Anweisungen/ Erläuterungen:	Verwenden Sie **für jede Aufgabe ein neues Blatt**
Hilfsmittel:	Formelsammlung Mathematik kompakt (deutsch oder englisch) (Adrian Wetzel / ISBN: 978-3-9523907-5-7) Taschenrechner TI83, TI83+, TI84+, TI84+ Silver Edition, TI84+ CE-T
Bewertung:	Maximal 78 Punkte. Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1: Vektorgeometrie

2+2+3+3+5=15 Punkte

Gegeben sind die Ebene $\mathbb{E}$ und die Gerade g_a mit

$$\mathbb{E}: \quad x + 4y + 8z + 18 = 0$$

$$g_a: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

a) Betrachten wir die Gerade g_a ($a \in \mathbb{R}$) mit $a = \mathbf{1}$, also die Gerade

$$g_1: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

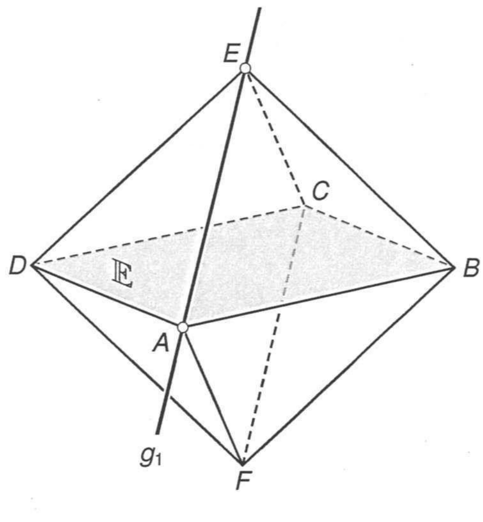
Berechnen Sie den Schnittpunkt A der Geraden g_1 mit der Ebene $\mathbb{E}$.

b) Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g_1 die xy-Ebene?

c) Für welchen Wert von a existiert **kein** Schnittpunkt der Geraden g_a mit der Ebene $\mathbb{E}$? Beschreiben Sie die gegenseitige Lage dieser Geraden bezüglich der Ebene $\mathbb{E}$.

d) Alle Geraden g_a liegen in einer gemeinsamen Ebene $\mathbb{F}$. Berechnen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene und beschreiben Sie die Lage der Ebene $\mathbb{F}$ im Raum.

e) Der Punkt $E(11|3|5)$ auf der Geraden g_1 und der in Teilaufgabe **a)** berechnete Punkt A sind Eckpunkte eines regelmässigen Oktaeders (alle Kanten sind gleich lang) $ABCDEF$, dessen Quadrat $ABCD$ in der Ebene $\mathbb{E}$ liegt.
Wählen Sie **einen** der Punkte B oder D aus und berechnen Sie seine Koordinaten.



Aufgabe 2: Gebrochenrationale Funktion

1+2+3+5+4=15 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 2 - \frac{8}{x^2}$$

a) Berechnen Sie alle Nullstellen von $f(x)$.

b) Bestimmen Sie die Geradengleichungen der horizontalen und vertikalen Asymptoten von $f(x)$.

c) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f(x)$ weder Extremstellen noch Wendestellen hat.

d) Berechnen Sie die Tangentengleichungen an den Nullstellen von $f(x)$ und berechnen Sie die Fläche, welche von diesen Tangenten und der horizontalen Geraden $y = 2$ eingeschlossen wird.

e) Die y-Achse, die x-Achse, der Graph von $f(x)$ und die Gerade $y = 2$ schliessen im ersten Quadranten eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Berechnen Sie ihren Flächeninhalt.

Aufgabe 3: Exponentialfunktion

1+2+4+2+4=13 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(x) = 4x \cdot e^{-0.5x}$$

a) Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion $f(x)$.

b) Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to \infty$? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Bestimmen Sie die Art des Extremalpunkts und berechnen Sie seine Koordinaten **exakt**.

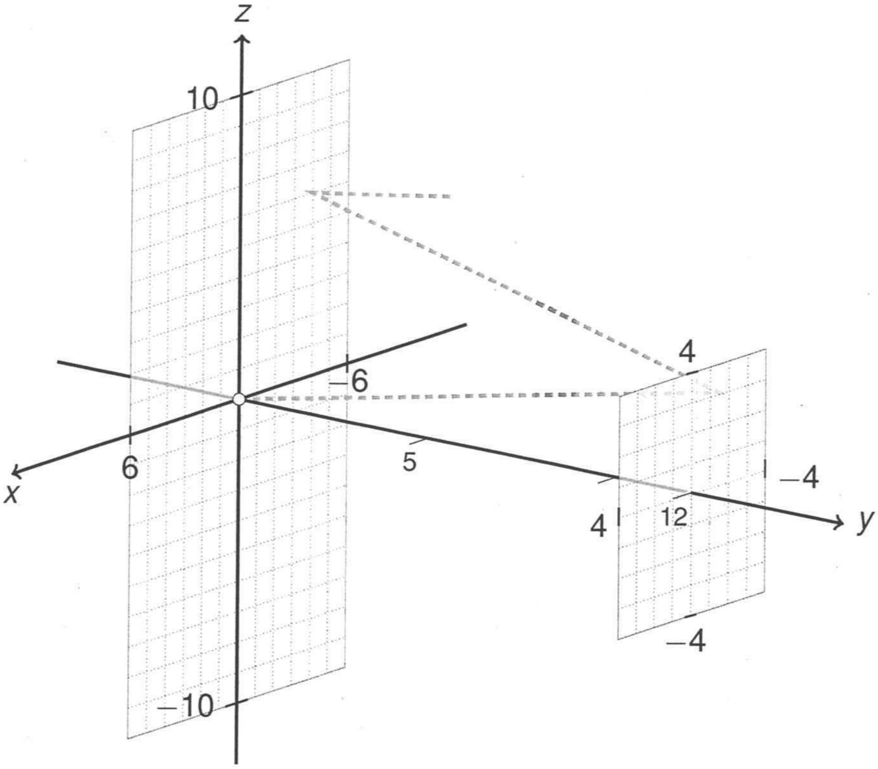
d) Zeigen Sie:
G mit $G(x) = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x}$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

e) Der Graph der obigen Funktion f mit $f(x) = 4x \cdot e^{-0.5x}$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$, die Gerade $x = 2$ und die positive x-Achse schliessen ein Flächenstück ein. Berechnen Sie das **Volumen**, welches bei Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

Aufgabe 4: Parallele Spiegel

2+3+2+2+2=11 Punkte

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei zueinander parallele Spiegel angebracht. Der grössere Spiegel liegt in der xz-Ebene, der kleinere bei $y = 12$.
Die Abmessungen der beiden Spiegel sind aus der Abbildung ersichtlich:



Im Ursprung $O(0|0|0)$ befindet sich eine punktförmige Lichtquelle.

a) Gibt es Lichtstrahlen aus dem Ursprung, die nach Spiegelung am kleinen Spiegel den grossen Spiegel **nicht** treffen?
Wenn **ja**: Wo würde ein solcher Lichtstrahl den kleinen Spiegel treffen? Geben Sie ein Beispiel.
Wenn **nein**: begründen Sie dies.

b) Wie lang ist der längste Weg, den ein Lichtstrahl vom Ursprung einmal zum kleinen Spiegel und wieder zurück zum grossen Spiegel zurücklegen kann?

c) Ein Lichtstrahl ℓ verlässt die Lichtquelle in Richtung $\vec{v}_\ell = \begin{pmatrix} -0.1 \\ 1 \\ 0.2 \end{pmatrix}$

In welchem Punkt trifft er auf den kleinen Spiegel?

d) Der Lichtstrahl ℓ aus Teilaufgabe **c)** wird vom kleinen Spiegel zurückgeworfen. Der zurückgeworfene Strahl ℓ' sieht so aus, als würde er vom Spiegelbild der Lichtquelle ausgehen.
Geben Sie eine Parametergleichung für die Gerade von ℓ' an.

e) Ein anderer Lichtstrahl g wurde mehrfach hin und her gespiegelt. Am Ende hat seine Gerade die Parametergleichung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -48 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1.2 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wie oft wurde er an einem Spiegel reflektiert?

Aufgabe 5: Lucky-Box

$\boxed{2+1+2+2+3+3=13 \text{ Punkte}}$

Im TV-Gewinnspiel "Lucky-Box" geht es um 20 nummerierte Boxen, in welchen jeweils ein Zettel mit einem Geldbetrag steht. Zusätzlich gibt es fünf Multiplikationscouverts, welche den Gewinn erhöhen können.

Folgende Beträge und Faktoren sind in den Boxen und Couverts versteckt:

Geldbetrag:	Anzahl:
50.–	5×
100.–	5×
200.–	3×
500.–	2×
1 000.–	1×
2 000.–	1×
5 000.–	1×
20 000.–	1×
100 000.–	1×
	20×

Multiplikationsanweisung:	Anzahl:
"beibehalten"	3×
"verdoppeln"	1×
"verfünffachen"	1×
	5×

Nun zieht man eine Geldbox und ein Multiplikationscouvert.
Der Gewinn wird berechnet, indem der Geldbetrag aus der Box je nach Anweisung im Couvert beibehalten oder vergrössert wird.
Somit ist der Hauptgewinn (d.h. der maximal mögliche Gewinn)

$$\boxed{100\,000.–}\ \boxed{\text{verfünffachen}} \Rightarrow 500\,000.–$$

a) **Auf wie viele Arten** können die 20 Zettel mit den Geldbeträgen auf die 20 nummerierten Boxen verteilt werden?

Wie gross ist die **Wahrscheinlichkeit**, dass...

b) ... man den Hauptgewinn gezogen hat?

c) ... man **mindestens** 200.– gewonnen hat?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 25 Sendungen mehr als 17 Mal ein Gewinn von mindestens 200.– gezogen wird?

e) Angenommen, man erfährt, dass man 500.– gewonnen hat. Wie gross ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass man eine $\boxed{500.–}$-Geldbox gezogen hat?

f) Nach Jahren und dem 1000. Gewinnspiel "Lucky-Box" wird eine Statistik publik. Der Hauptgewinn (d.h. Box $\boxed{100\,000.–}$ mit Couvert $\boxed{\text{verfünffachen}}$) wurde in dieser ganzen Zeit nur 3× gezogen.

Eine Zeitung titelt:

Statistik enthüllt Skandal: "Lucky-Box" über Jahre manipuliert!

Die Spielanbieter beteuern, dass alles mit rechten Dingen zugegangen sei und die Spieler einfach überdurchschnittliches Pech gehabt hätten.
Ergreifen Sie Partei für eine der Aussagen und begründen Sie Ihre Entscheidung durch eine Rechnung.

Aufgabe 6: Hummer-Falle

2+5+4=11 Punkte

Eine Hummerfalle hat die Form eines halben Zylinders. Sie besteht aus einem Drahtrahmen, der von einem Netz umgeben ist.
Der Drahtrahmen besteht aus einem rechteckförmigen Boden der Länge ℓ, zwei halbkreisförmigen Enden mit Radius r und zwei weiteren geraden Drahtstücken zur Stabilisierung (siehe Skizze).
L sei die gesamte Drahtlänge. V sei das Volumen der Falle.

a) Drücken Sie L aus durch V und r. Zeigen Sie, dass gilt:

$$L(r) = (2\pi + 4)r + \frac{8}{\pi r^2} V$$

b) Das Volumen soll $V = 0.75 \text{ m}^3$ betragen.
Für welchen Radius r und für welche Länge ℓ benötigt man am wenigsten Draht? (Die Untersuchung der Randwerte wird nicht gefordert).

c) *Beim Lösen der Teilaufgabe* **c)** *dürfen alle Funktionen des grafikfähigen Rechners uneingeschränkt verwendet werden:*

Die gesamte Drahtlänge soll $L = 5$ m betragen.
Für welchen Radius r und welche Länge ℓ hat die Falle die grösste Gesamtoberfläche A (inklusive Boden)?
Stellen Sie die Zielfunktion $A(r)$ auf und bestimmen Sie deren Maximum auf 4 Dezimalstellen genau.