Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe eine neue Seite**.

Dauer: Vier Stunden

Hilfsmittel: Formeln, Tabellen, Begriffe (DMK),
Taschenrechner TI-83, TI-83+, TI-84, TI-84+, TI-84+ Silver Edition
Es gelten die Taschenrechner-Bestimmungen des Gymnasiums Oberwil.

Bewertung: maximal 78 Punkte
Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

---

1. $\boxed{6+2+5+2 = 15 \text{ Punkte}}$

Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = -x^3 + 5x^2 - 4x$

a) Bestimmen Sie allfällige Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte und Wendepunkte des Graphen von f. Zeichnen Sie den Graphen von f.

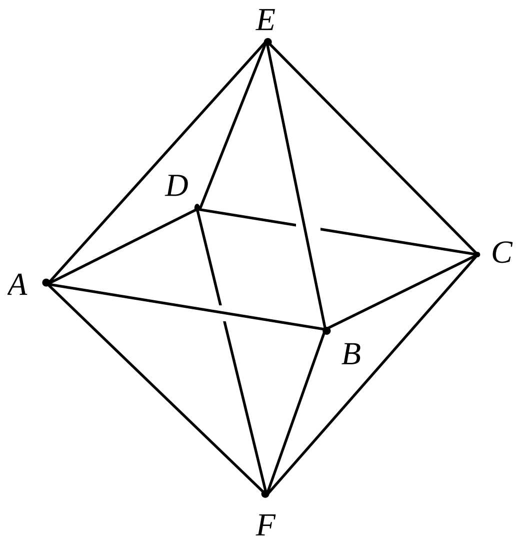
b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird und im ersten Quadranten liegt.

c) Der Punkt $P(x, ?)$ liegt auf dem Graphen von f.
Die Tangente t an den Graphen von f im Punkt P geht durch den Punkt $Q(-3, 12)$. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen für P und in einem dieser Punkte die Gleichung der Tangente t.

d) Nun betrachten wir die verallgemeinerte Funktion $y = g(x) = -x^3 + ax^2 + bx$.
Sie hat in $S(2, y_S)$ einen Terrassenpunkt. Berechnen Sie a, b und y_S.

2. $4 + 4 + 2 = 10$ Punkte

Gegeben sind die Spitzen $E(5, 1, 0)$ und $F(1, 5, 2)$ einer geraden Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ (siehe Skizze rechts).



a) Die Ecke A liegt auf der Geraden

$$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie A.

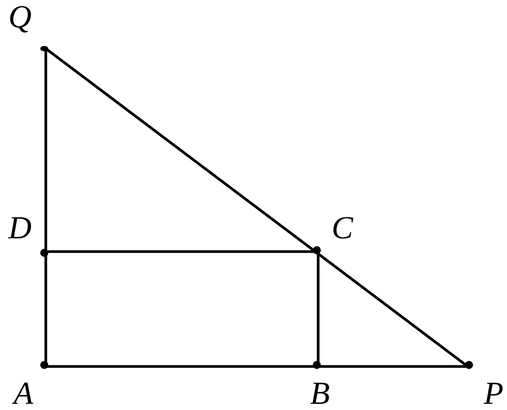
Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie mit $A^*(5, 4, 3)$ *weiter.*

b) Bestimmen Sie die Ecken B, C und D.

c) (kann auch ohne b) gelöst werden)
Bestimmen Sie das Volumen dieser Doppelpyramide.

3. $2 + 5 = 7$ Punkte

$ABCD$ ist ein Rechteck mit Seitenlängen $a = \overline{AB} = 9$ cm und $b = \overline{BC} = 4$ cm. APQ ist ein rechtwinkliges Dreieck (siehe Skizze rechts).



a) Berechnen Sie die Summe der Längen der beiden Dreieckskatheten für $\overline{BP} = 5$ cm.

b) Bestimmen Sie das Minimum der Summe der Längen der beiden Dreieckskatheten.
(Der Nachweis, dass ein Minimum vorliegt, wird verlangt.)

4. | $10 + 4 = 14$ Punkte |

a) Aufgrund der Vogelgrippe ging die Nachfrage nach Hühnerfleisch über eine gewisse Zeit stark zurück. Nach einiger Zeit hat sie sich aber wieder erholt.
Für eine Firma betrug die Nachfrage t Tage nach Beginn der Vogelgrippe

$$f(t) = 20 - 0.4 \cdot t \cdot e^{-0.01t} \quad \text{(in Tonnen pro Tag, } t \geq 0)$$

i) Wie viele Tonnen pro Tag verkaufte die Firma normalerweise?

ii) Bestimmen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} f(t)$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert?

iii) Nach wie vielen Tagen war die Nachfrage am geringsten?
Wie viele Tonnen wurden an diesem Tag verkauft?

iv) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für $0 \leq t \leq 500$

v) Markieren Sie in Ihrer Skizze den Punkt, an dem die Zunahme der verkauften Menge am grössten ist. Was ist der mathematische Fachbegriff für diesen Punkt auf der Kurve?

vi) Zeigen Sie, dass $F(t) = 20t + 40 \cdot t \cdot e^{-0.01t} + 4000 \cdot e^{-0.01t}$
eine Stammfunktion von f ist.

vii) Wie viele Tonnen hat die Firma in den ersten 400 Tagen nach Beginn der Vogelgrippe weniger verkauft als ohne die Vogelgrippe?

b) Auch die Nachfrage nach Hühnereiern hat in dieser Zeit nachgelassen.
t Tage nach Beginn der Vogelgrippe betrug er

$$g(t) = a - b \cdot t \cdot e^{-kt} \quad \text{(in Tausend Stück pro Tag, } t \geq 0)$$

Die Firma verkaufte normalerweise 150 Tausend Hühnereier pro Tag.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ sank die Nachfrage um 6 Tausend Stück pro Tag.
Nach 50 Tagen wurde die kleinste verkaufte Menge verzeichnet.
Bestimmen Sie aus diesen Angaben a, b und k.

5. $\boxed{2+2+1+2+4 = 11 \text{ Punkte}}$

Gegeben: Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Kugel K: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 14y - 6z - 22 = 0$

a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kugel K.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte A und B der Geraden g und der Kugel K.

Falls Sie b) nicht lösen können, rechnen Sie mit den Kugelpunkten $A^*(0, -15, -1)$ *und* $B^*(8, -11, 7)$ *weiter.*

c) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des grössten Kreises, welcher auf der Kugeloberfläche verläuft und durch die Punkte A und B geht.

d) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des kleinsten Kreises, welcher auf der Kugeloberfläche verläuft und durch die Punkte A und B geht.

e) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Kreises, welcher auf der Kugeloberfläche verläuft, durch die Punkte A und B geht und in einer Ebene senkrecht zur Ebene E: $3x + 2y + 5z = 0$ liegt.

6. $\boxed{4+2+1+1 = 8 \text{ Punkte}}$

a) Lösen Sie die Gleichung $z^3 = 8i$. Geben Sie die Lösungen z_1, z_2 und z_3 exakt in Normal- und in Polarform an. Zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene.

b) Beweisen Sie, dass diese Punkte ein gleichseitiges Dreieck bilden, und bestimmen Sie seinen Umfang.

c) Zeigen Sie, dass gilt: $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = 8i$

d) Zeigen Sie, dass gilt: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

7. $1 + 2 + 3 + 3 + 4 = 13$ Punkte

Die Wahrscheinlichkeit für eine Zwillingsgeburt beträgt in der Schweiz 1.9%.
Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Zwillinge eineiig sind, beträgt 20%.
Eineiige Zwillige haben das selbe Geschlecht.
Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt bei Zwillingen 48.5%.

a) In einem Schweizer Spital fanden gestern zwei Entbindungen statt.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zweimal Zwillinge zur Welt kamen?

b) Wieviele Entbindungen muss es in einem Spital mindestens geben, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einmal Zwillinge zur Welt kommen, grösser als 95% ist?

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Entbindung eine Zwillingsgeburt mit verschiedenen Geschlechtern ist.

d) Bei einer zufällig ausgewählten Zwillingsgeburt kommen zwei Mädchen zur Welt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie eineiig sind?

In einem bestimmten Jahr gab es in der Schweiz 1478 Zwillingsgeburten.
Die Statistik sah folgendermassen aus:

Zwei Mädchen:	415 Geburten
Ein Mädchen, ein Knabe:	631 Geburten
Zwei Knaben:	432 Geburten

Zur Erinnerung:
Die Wahrscheinlichkeit, dass Zwillinge eineiig sind, beträgt 20%.
Die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt bei Zwillingen 48.5%.

e) i) Wieviele Geburten hätte man aufgrund der oben angegebenen Wahrscheinlichkeiten für den Fall „ein Mädchen, ein Knabe“ erwartet?

ii) Kann man aus diesem Resultat schliessen, dass in diesem Jahr die Wahrscheinlichkeit für eine Zwillingsgeburt vom Typ „ein Mädchen, ein Knabe“ signifikant verändert war?
(Zweiseitiger Test, Irrtumswahrscheinlichkeit 4.5%)