Aufgabe 1: Kurvendiskussion

16 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{4}(x+2)^2(x-3) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 2x - 3$$

a) Berechnen Sie für den Graphen von f alle Nullstellen und die Koordinaten aller Extremal- und Wendepunkte.

b) Unter welchem Winkel α schneidet der Funktionsgraph von f die ***y*-Achse**?

Gegeben ist zudem die lineare Funktion g mit

$$g(x) = x - 3$$

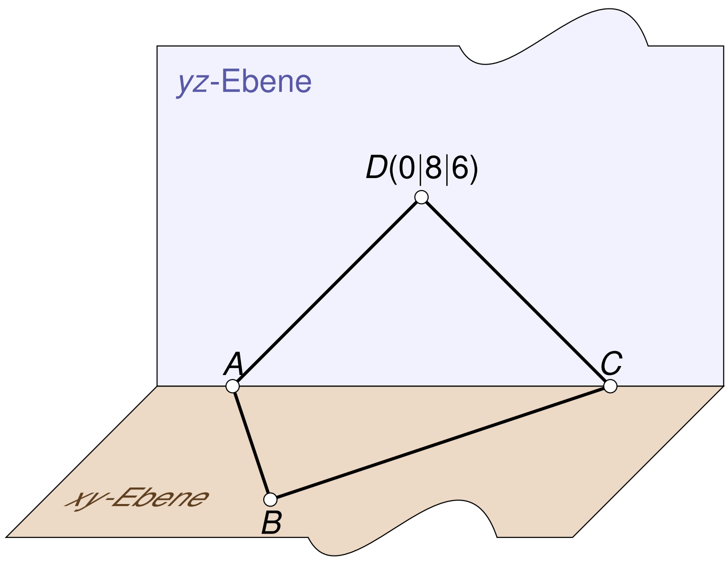
c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von f und g.
Hinweis: Verwenden Sie die faktorisierte Form der Funktionsgleichung.

d) Berechnen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, welche von den Graphen von f und g begrenzt wird.
*(Falls Sie **c)** nicht lösen konnten, dürfen Sie die benötigten Schnittpunkte mit dem Grafikrechner bestimmen.)*

Aufgabe 2: Geknicktes Viereck

7 Punkte

In der xy- und yz-Ebene liegen die Ecken eines geknickten Vierecks:



a) Bestimmen Sie die Koordinaten von A und C so, dass das Dreieck CDA gleichschenklig und rechtwinklig wird. Der rechte Winkel soll in D sein.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von B so, dass das Dreieck ABC ebenfalls gleichschenklig und rechtwinklig wird, mit rechtem Winkel in B.

*(Falls Sie **a)** und **b)** nicht lösen konnten, rechnen Sie mit folgenden Ersatzwerten weiter: $A(0|6|0)$, $C(0|26|0)$, $B(6|8|0)$. Mit diesen Ersatzwerten sind die Dreiecke immer noch rechtwinklig, aber nicht mehr gleichschenklig.)*

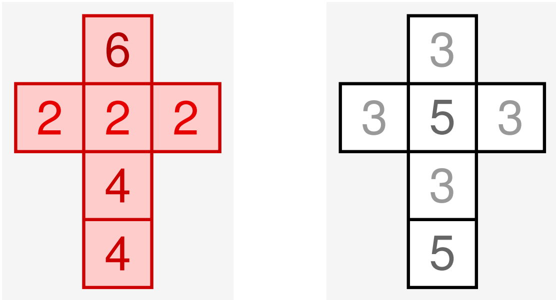
c) Berechnen Sie den Winkel $\measuredangle DCB$ (der Scheitel des gesuchten Winkels ist in C).

d) Die Punkte A und B definieren eine Gerade g. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S, in dem g die xz-Ebene durchstösst.

Aufgabe 3: Farbige Würfel

14 Punkte

In einer Urne sind 20 rote und 10 weisse Würfel mit den abgebildeten Würfelnetzen.



Sie ziehen einen Würfel, werfen ihn, notieren sich Farbe und Augenzahl, und legen den Würfel wieder in die Urne zurück. Das Ganze wird **drei Mal** durchgeführt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:

a) Alle drei gezogenen Würfel sind von derselben Farbe.

b) Das Produkt der drei Augenzahlen ist gerade.

c) Die nach oben zeigende Seite und diejenige Seite, welche nach unten zeigt, haben jedes Mal dieselbe Augenzahl.

Aus den gleichen 30 Würfeln wurde nun **ein** Würfel gezogen und **zwei Mal** geworfen. Die Summe der beiden Augenzahlen betrug 6.

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen roten Würfel handelt?

Bianca und Rosa spielen folgendes Spiel: Bianca würfelt mit einem weissen und Rosa mit einem roten Würfel. Wer die höhere Augenzahl wirft, gewinnt von der Mitspielerin so viele Franken, wie der eigene Würfel anzeigt.

e) Mit welchem Gewinn oder Verlust pro Runde kann Bianca rechnen?

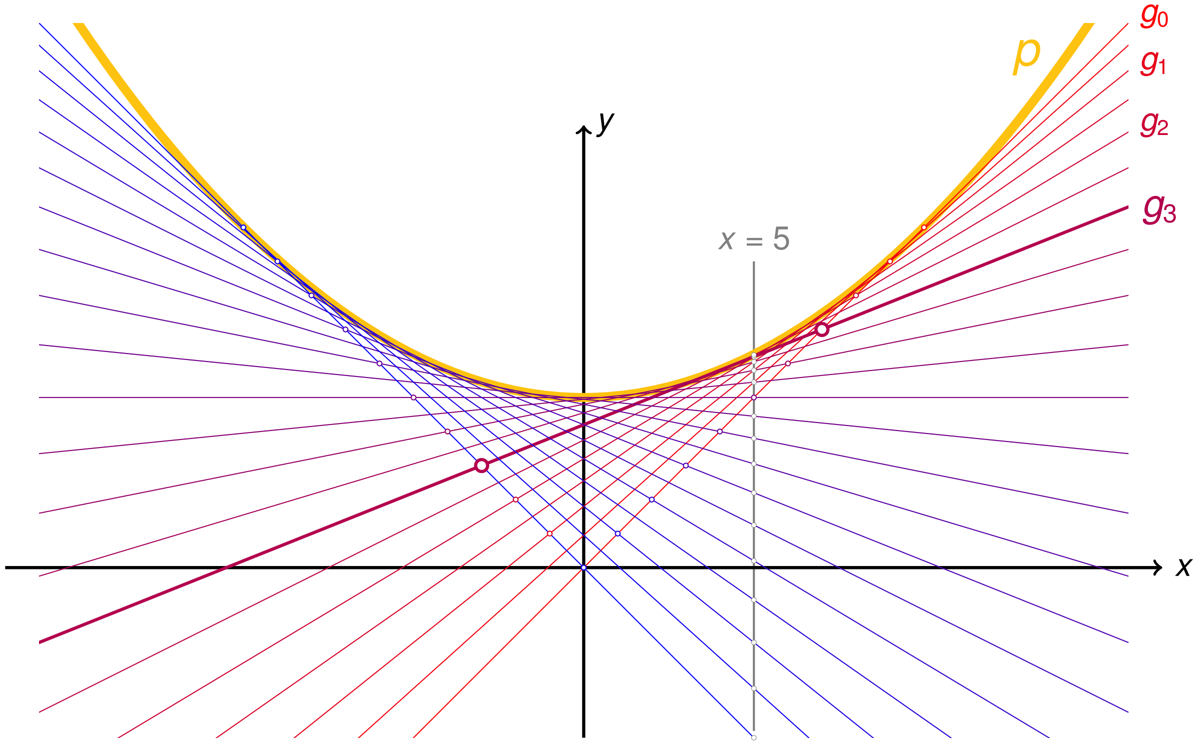
Aufgabe 4: Hüllkurve

12 Punkte

In der folgenden Abbildung sind einige Geraden g_0, g_1, g_2, g_3, ... abgebildet. Dabei geht die Gerade g_t durch die Punkte

$$P(-t|t) \quad \text{und} \quad Q(10-t|10-t).$$

Der Parameter $t \in \mathbb{R}$ liegt im Bereich $0 \leq t \leq 10$.



Zeichnet man die Schar von allen so definierten Geraden, so hüllen diese eine Kurve p ein. Diese Kurve nennt man **Hüllkurve** der Geradenschar.

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden g_3 an.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g_t die Funktionsgleichung

$$g_t(x) = (1 - 0.2 \cdot t)\, x \; + 2t - 0.2t^2$$

hat.

c) Nun betrachten wir die Vertikale mit der Gleichung $x = 5$ (siehe Abbildung). Diese wird von allen Geraden g_t geschnitten.
Berechnen Sie t so, dass der entsprechende Schnittpunkt grösstmögliche y-Koordinate aufweist.

An der **Hüllkurve** p ist jede Gerade mit demjenigen Punkt beteiligt, welcher im Vergleich zu den Punkten aller anderen Geraden an der entsprechenden Stelle die höchste y-Koordinate aufweist. In Teilaufgabe **c)** haben Sie damit **einen** Punkt der Hüllkurve bestimmt.
Bei dieser Hüllkurve handelt es sich um eine Parabel mit Scheitel auf der y-Achse, das heisst, sie hat die Funktionsgleichung

$$p(x) = ax^2 + c$$

d) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Hüllkurve p.

Aufgabe 5: Dreieck

12 Punkte

Gegeben sind das Dreieck *ABC* mit

$$A(3|6|16), \quad B(9|12|-8), \quad C(-15|6|-2)$$

und der Punkt $P(-8|4|15)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck *ABC* gleichseitig ist.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt *P* in der gleichen Ebene wie das Dreieck *ABC* liegt.

c) Liegt der Punkt *P* innerhalb oder ausserhalb des Dreiecks *ABC*? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen auf einer Kugel, deren Mittelpunkt *M* in der *xy*-Ebene liegt. Berechnen Sie die Koordinaten von *M*.
Hinweis: Überlegen Sie, wo alle Punkte liegen, welche den gleichen Abstand von allen drei Punkten A, B und C haben.

Aufgabe 6: Wieviele Kopien?

4 Punkte

Für einen Weiterbildungskurs haben sich 100 Teilnehmer angemeldet. Alle von ihnen haben die Kursunterlagen vorher per Post zugeschickt bekommen, mit der Bitte, sie zum Kurs mitzubringen.
Die Erfahrung zeigt, dass manche die Unterlagen zu Hause vergessen: dies passiert jedem Teilnehmer mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0.2$

a) Die Kursleitung hält deshalb 25 Reservekopien bereit. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Reservekopien ausreichen.

b) Als der Kurs beginnt, haben nur 11 Teilnehmer ihre Unterlagen vergessen.
Die Sekretärin sagt: “Dieses Jahr erinnern sich die Leute zuverlässiger, ihre Unterlagen mitzubringen. Vielleicht deswegen, weil ich es auf dem Einladungsbrief rot angestrichen habe.”
Die Kursleiterin sagt: “Die Leute sind genauso unzuverlässig wie immer, wir hatten dieses Jahr nur einfach Glück.”
Ergreifen Sie Partei für eine dieser Aussagen. Begründen Sie Ihre Entscheidung durch eine Rechnung.

Aufgabe 7: Exponentialfunktion

11 Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = c \cdot a^x \quad \text{wobei } a, c \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0$$

.

a) Berechnen Sie die Parameter a und c so, dass der Graph von f durch die Punkte $P(4|\frac{1}{4})$ und $Q(-1|8)$ verläuft.

Verwenden Sie in den folgenden Teilaufgaben für a und c die Werte, die Sie in Teilaufgabe **a)** berechnet haben.
*(Wenn Sie **a)** nicht lösen können, verwenden Sie für die folgende Teilaufgabe $f(x) = 72 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$.)*

Gegeben ist eine weitere Funktion g mit

$$g(x) = 0.5 \cdot 4^x$$

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt $S(x_s|y_s)$ der Graphen von f und g.

c) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von g im Schnittpunkt S. Steigung und y-Achsenabschnitt müssen **exakt** angegeben werden.
*(Falls Sie **b)** nicht lösen konnten, dürfen Sie den benötigten Schnittpunkt mit dem Grafikrechner bestimmen.)*

d) Nun wird der Graph von g über dem Intervall $[-2; 0]$ um die x-Achse rotiert.

Berechnen Sie das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers auf zwei Nachkommastellen genau.