BASEL LANDSCHAFT
BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2022
Mathematik – Profil A

Klasse:	4a, 4bA, 4cA	Mathematiklehrer: Jonas Gloor, Christian Oehrli
Zeit:	4 h	
Anzahl Seiten: (ohne Deckblatt)	4 Seiten	
Inhalt:	6 Aufgaben	
Hinweise:	Verwenden Sie **für jede Aufgabe ein neues Blatt**.	
Hilfsmittel:	Formelsammlung (DMK/DPK/DCR – Begriffe, Formeln, Tabellen) Taschenrechner (TI-83 oder TI-84 mit leerem Speicher). Es gelten die Taschenrechner-Bestimmungen des Gymnasiums Oberwil.	
Bewertung:	maximal 60 Punkte Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angeschrieben. Für die Note 6 ist nicht die maximale Punktzahl erforderlich.	

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1 $3 + 2 + 2 + 2 + 3 =$ **12 Punkte**

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x \qquad \text{und} \qquad g(x) = \frac{-9x^2 + 52x - 77}{12x - 24}$$

definierten Funktionen.

a) Der Graph von f hat zwei Nullstellen. Bestimmen Sie diese und weisen Sie rechnerisch nach, dass der Graph von f bei einer dieser Nullstellen einen Tiefpunkt hat.

b) Bestimmen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird.

c) Bestimmen Sie den Wendepunkt von f und die Tangente an den Graphen von f im Wendepunkt.

d) Der Graph von g hat zwei Asymptoten a_1 und a_2.

Weisen Sie nach, dass die Gerade $a_1\colon \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{17}{6}$ eine dieser Asymptoten ist, und

bestimmen Sie die Gleichung der anderen Asymptoten a_2.

e) Zeigen Sie, dass die in c) bestimmte Tangente eine Winkelhalbierende der in d) bestimmten Asymptoten ist, und bestimmen Sie die Gleichung der anderen Winkelhalbierenden.

Aufgabe 2 $3 + 1.5 + 1.5 + 2 + 2 + 2 =$ **12 Punkte**

Gegeben sind die Punkte $A(1, -5, -2)$ und $B(1, 4, 7)$

sowie die Gerade $g\colon \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck mit Schenkellängen $\overline{AC} = \overline{BC}$.
Die Ecke C liegt auf der Geraden g.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten von C.

Wenn Sie den Punkt C nicht bestimmen konnten, so rechnen Sie mit der Ersatzlösung $C(4, 7, -5)$ weiter.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC sogar gleichseitig ist.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schwerpunkts S des Dreiecks ABC.

d) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt.

$ABCD$ ist ein reguläres Tetraeder.

e) Bestimmen Sie die Höhe dieses Tetraeders.

f) Bestimmen Sie eine Möglichkeit für die Ecke D.

Aufgabe 3 $2+4+3=$ **9 Punkte**

Die drei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

a) Die quadratische Gleichung $(7+\mathrm{i})z^2 - (2+6\,\mathrm{i})z + c = 0$ hat nur eine Lösung z.

Bestimmen Sie die komplexe Zahl c in Normalform.

b) Die Gleichung $z^3 = d$ hat $z_1 = -1 + 3\,\mathrm{i}$ als Lösung.

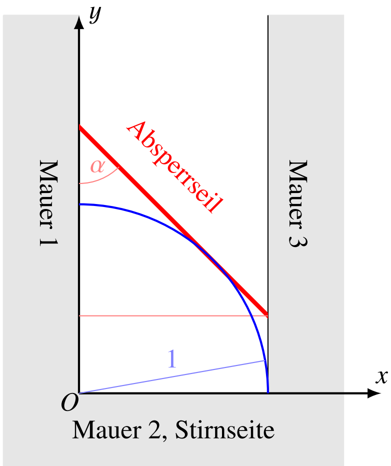
Bestimmen Sie die komplexe Zahl d und die beiden anderen Lösungen in Normalform (**gerundete Resultate**).

c) Gegeben ist der Kegelschnitt mit der Gleichung $K\colon\ y^2 - 4x + 4y = -16$.

Bestimmen Sie die Art des Kegelschnitts K und im Falle einer Ellipse oder Hyperbel beide Brennpunkte und im Falle einer Parabel den Brennpunkt und die Leitlinie.

Aufgabe 4 $2+3+3=$ **8 Punkte**

Ein Hof wird von drei Seiten von Mauern begrenzt. Mauern 1 und 3 verlaufen parallel im Abstand 1 zueinander (und werden parallel zur y-Achse angenommen). Mauer 2 steht senkrecht dazu (parallel zur x-Achse). Die Skizze zeigt den Grundriss.
Ein bissiger (aber punktförmiger) Hund bewacht die Stirnseite. Er ist in der einen Ecke beim Punkt O an einer Kette der Länge 1 angekettet und kann sich im skizzierten Viertelkreis bewegen.
Damit keine fremden Leute dem Hund zu nahe kommen, wird ein Seil zwischen den beiden parallelen Mauern 1 und 3 gespannt. Das Seil soll den Viertelkreis, welcher den Bewegungsperimeter des Hundes begrenzt, gerade berühren.



a) Bestimmen Sie elementargeometrisch, wie gross die abgesperrte Fläche wird, wenn das Seil einen Winkel von $\alpha = 45°$ zu den Mauern bildet (vgl. Skizze).

b) Zeigen Sie, dass für die abgesperrte Fläche A als Funktion des Winkels α gilt:

$$A(\alpha) = \frac{2 - \cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

c) Wie gross muss der Winkel α gewählt werden, damit die abgesperrte Fläche möglichst klein wird? Der Nachweis, dass es sich tatsächlich um ein Minimum handelt, wird nicht verlangt.

Aufgabe 5 $1 + 2 + 2 + 3 + 2 =$ **10 Punkte**

Eine Urne enthält drei rote Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet sind, und zwei blaue Kugeln, die mit den Zahlen 1 und 2 beschriftet sind.

a) Rita und Bob spielen das folgende Spiel:

Rita zieht eine Kugel aus der Urne. Falls diese Kugel rot ist, erhält sie den Betrag, der auf der Kugel steht, in Franken von Bob. Falls die Kugel blau ist, zahlt sie Bob das Doppelte des Betrags, der auf der Kugel steht, in Franken.

Zeigen Sie, dass dieses Spiel fair ist.

b) Zwei Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel eine grössere Zahl als die erste zeigt?

c) Fünf Kugeln werden mit Zurücklegen gezogen.

c1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei Kugeln blau sind?

c2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Kugeln blau sind?

d) Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

X ist das Produkt der beiden Zahlen. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

e) Zwei Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen. Sie zeigen verschiedene Zahlen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel rot ist?

Wahlaufgabe 6 **9 Punkte**

Bearbeiten Sie *entweder* Aufgabe 6.1 *oder* Aufgabe 6.2.

Sollten Sie beide Aufgaben bearbeiten, so muss klar gekennzeichnet sein, welche Aufgabe bewertet werden soll. Die andere Aufgabe wird dann weder korrigiert noch bewertet. Fehlt eine klare Kennzeichnung, so wird *nur* Aufgabe 6.1 korrigiert und bewertet.

Aufgabe 6.1 1 + 3 + 5 = **9 Punkte**

Gegeben ist die durch $f(x) = x \cdot \ln x$ definierte Funktion.

a) Bestimmen Sie allfällige Nullstellen des Graphen von f.

b) Bestimmen Sie allfällige Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f
(**exakte Resultate**).

Die Gerade $t\colon y = 2x - \mathrm{e}$ ist eine Tangente an den Graphen von f mit Berührpunkt bei $P(\mathrm{e}\,|\,\mathrm{e})$. Diese Tatsache muss nicht nachgewiesen werden und soll für die Lösung von Teilaufgabe c) verwendet werden.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der endlichen Fläche, die vom Graphen von f, der Tangente t und der x-Achse begrenzt wird und im ersten Quadranten liegt.

Aufgabe 6.2 2 + 3 + 4 = **9 Punkte**

Gegeben sind die Kugel $K\colon \quad x^2 + y^2 + z^2 + 14x - 24y - 14z = 0$

und die Gerade $g\colon \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -13 \\ 8 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt M und den Radius R der Kugel K.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g eine Tangente an die Kugel K ist, und bestimmen Sie den Berührpunkt.

c) Die Menge aller Tangenten an die Kugel durch den Geradenpunkt $S(11|0|11)$ bildet einen Kreiskegel mit Spitze S. Dieser Kegel berührt die Kugel K in einem Kreis.
Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius dieses Kreises.