BASEL LANDSCHAFT
BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2022
Mathematik - Grundlagenfach

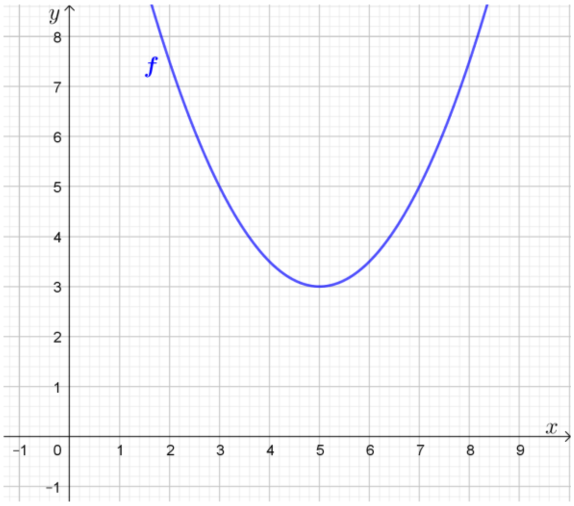
Klasse / Kurs:	4b / 4c / 4d / 4e / 4f / 4g / 4h / 4k
Anzahl Seiten: **(ohne Deckblatt)**	6
Inhalt:	Maturitätsprüfung 2022, Mathematik schriftlich, Grundlagenfach Aufgabe 1: Kurzaufgaben, 14 Punkte Aufgabe 2: Stochastik, 13 Punkte Aufgabe 3: Vektorgeometrie, 14 Punkte Aufgabe 4: Analysis, 6 Punkte Aufgabe 5: Analysis, 15 Punkte Aufgabe 6: Analysis, 12 Punkte
Anweisungen/ **Erläuterungen:**	Verwenden Sie **für jede Aufgabe ein neues Blatt**
Hilfsmittel:	Formelsammlung Mathematik kompakt (deutsch oder englisch) (Adrian Wetzel / ISBN: 978-3-9523907-5-7) Taschenrechner Ti-30X Pro MultiView oder Ti-30X Pro MathPrint
Bewertung:	Maximal 74 Punkte. Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1 | 14 Punkte (1.5P+2P+2.5P+2P+2P+2P+2P)

a) Bestimmen Sie eine Funktionsgleichung der Funktion f.

(Lesen Sie dazu aus der Grafik geeignete Punkte ab)



b) Berechnen Sie das exakte Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation des Graphen von $f(x) = x^4$ um die x-Achse im Intervall $I = [0; 3]$ entsteht.

c) Gegeben sind die Punkte $A(1|4|5)$, $B(2|3|6)$ und $C(3|3|5)$. Bestimmen Sie eine Koordinatenform der Ebenengleichung durch die drei Punkte.

d) Gegeben ist die Ebene $E: 3x - 4y + z = 5$ und der Punkt $P(10|-11|9)$. Die Gerade g verläuft senkrecht zur Ebene durch P. Berechnen Sie den Schnittpunkt von E und g.

e) Gegeben sind die Punkte $A(1|2|4)$ und $B(5|2|8)$. Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene aller Punkte, die von A und B gleich weit entfernt sind.

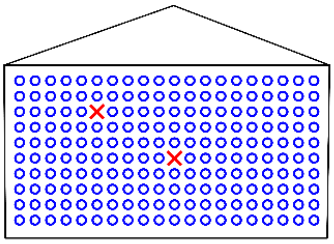
f) In einer Urne befinden sich 6 Kugeln, wobei 4 schwarz und 2 weiss sind. Daraus werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Die Zufallsgrösse X gibt an, wie viele schwarze Kugeln gezogen wurden. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$.

g) Bestimmen Sie alle Zahlen, die beim Quadrieren um 2 grösser werden.

Aufgabe 2 | 13 Punkte (1P+1P+3P+2P+2P+2P+2P)

Das Hotel Bernoulli hat 200 Zimmer, welche alle unabhängig voneinander gebucht werden können.

a) Es sind 198 Zimmer gebucht. Sie sehen das «Schlüsselbrett» des Hotels. Von 200 Zimmern sind 198 vergeben. Auf wie viele Arten kann dieses Schlüsselbrett für 198 gebuchte Zimmer aussehen?



Im Hotel Bernoulli gibt es vier verschiedene Arten von Zimmern (siehe Tabelle 1).

b) An einem Exklusivwochenende gibt es einen Einheitspreis von CHF 99. – für jedes Zimmer. Alle Zimmer werden zufällig zugelost. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass als Erstes ein Deluxe-Zimmer gezogen wird?

Zimmer Kategorie	Anzahl	P[illegible]/Nacht
Budget-Zimmer	80	[illegible]0. –
Standard-Zimmer	60	CH[illegible] –
Komfort-Zimmer	40	CHF [illegible]
Deluxe-Zimmer	20	CHF 50[illegible]

Exklusiv 99.-

Tabelle 1

c) Eine Gruppe von drei Personen bucht auch an diesem Exklusivwochenende je ein Zimmer. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass…

i) …allen der Dreiergruppe ein Budget-Zimmer zugelost wird?

ii) …genau Zweien der Dreiergruppe ein Standard-Zimmer zugelost wird?

d) An einem anderen (normalen) Wochenende (siehe Tabelle 2) sind alle Zimmer des Hotels gebucht worden. Aus der Vergangenheit ist bekannt, dass jede Übernachtung mit je 90% Wahrscheinlichkeit angetreten wird. Mit wie vielen Einnahmen kann das Hotel an diesem Wochenende rechnen, wenn nur die angetretenen Übernachtungen verrechnet werden?

Zimmer Kategorie	Anzahl	Preis/Nacht
Budget-Zimmer	80	CHF 100. –
Standard-Zimmer	60	CHF 200. –
Komfort-Zimmer	40	CHF 300. –
Deluxe-Zimmer	20	CHF 500. –

Tabelle 2

Gehen Sie für die folgenden Rechnungen weiterhin von der Antrittswahrscheinlichkeit von 90% aus.

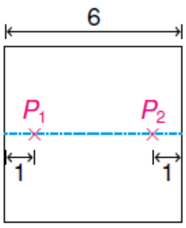
e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 20 beliebig ausgesuchten Buchungen, genau drei ihre Übernachtung nicht antreten werden.

f) Wie viele Buchungen darf das Hotel maximal annehmen, damit die Wahrscheinlichkeit kleiner als 1% ist, dass das Hotel überbelegt ist?

g) In der Hauptsaison (265 Tage) werden für jede Nacht genau 220 Buchungen angenommen. Das führt dazu, dass manchmal Gäste trotz gültiger Buchung abgewiesen werden müssen. An wie vielen Tagen ist damit zu rechnen?

Aufgabe 3 | 14 Punkte

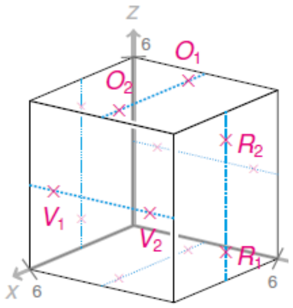
(1P+3P+2P+2P+2P+4P)



Wir betrachten einen Würfel mit Kantenlänge 6. Eine Ecke ist im Ursprung, drei Kanten liegen auf den Koordinatenachsen.

(1) Auf jeder Fläche des Würfels ist *eine* der beiden Mittellinien eingezeichnet.

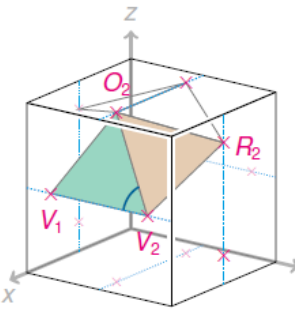
1



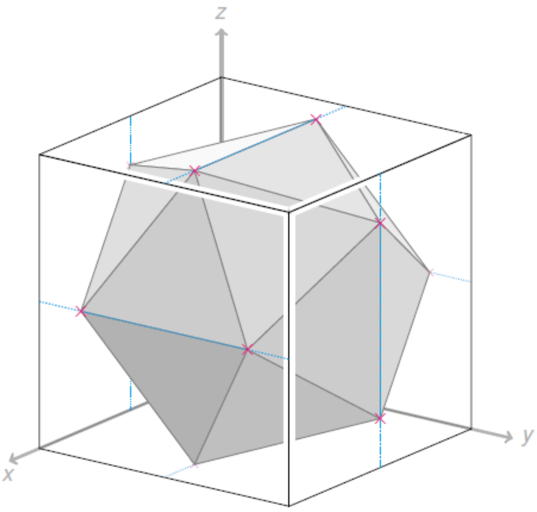
2

(2) Auf jeder dieser Mittellinien sind – jeweils 1 Einheit vom Ende entfernt – zwei Punkte eingezeichnet.

(3) Verbindet man jeweils drei dieser Punkte entsteht ein Körper **(4)** in diesem Würfel



3



4

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des **Punktes** V_2.

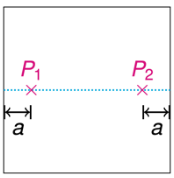
b) Berechnen Sie den **Winkel** $\sphericalangle V_1 V_2 O_2$ (Scheitel im Punkt V_2).

c) Zeigen Sie, dass das **Dreieck** $V_2 R_2 O_2$ drei gleich lange Seiten hat.

d) Aus wie vielen Dreiecken besteht die Oberfläche des gesamten Körpers?
Wie viele dieser Dreiecke sind gleich**seitig**, wie viele sind es nicht?
Geben Sie an, wie Sie gezählt haben.

e) Wie sieht die Schnittfigur aus, wenn der Körper mit der horizontalen Ebene $z = 3$ geschnitten wird?
Erstellen Sie eine aussagekräftige **Skizze** der Schnittfigur und berechnen Sie den **Flächeninhalt** der Schnittfigur.

f) Wir werden jetzt alle **Punkte** auf der jeweiligen **Mittellinie** etwas verschieben:



Dadurch können alle Dreiecke gleichseitig gemacht werden.
Bestimmen Sie den Wert a so, dass das **Dreieck** $V_1\ V_2\ O_2$ drei **gleich lange** Seiten bekommt.

Aufgabe 4 | 6 Punkte (1P+2P+2P+1P)

Auf einer Zimmerpflanze vermehren sich Blattläuse. Der Bestand der Blattläuse $B(t)$ ändert sich mit der Änderungsrate

$$B'(t) = -0.06t^2 + 2.4t$$

Dabei ist t die Zeit in Wochen ($t \geq 0$) und $B'(t)$ die Änderung des Bestandes in Anzahl Blattläuse pro Woche.

a) Berechnen Sie die Nullstellen von $B'(t)$.

b) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem der Bestand der Blattläuse **am stärksten zunimmt**.

c) Finden Sie die Funktionsgleichung der Funktion $B(t)$, die die Anzahl Blattläuse abhängig von der Zeit beschreibt. Gehen Sie dabei davon aus, dass zum Startzeitpunkt der Messung ($t = 0$ Wochen) 10 Blattläuse auf der Zimmerpflanze sind.

d) Berechnen Sie, welche maximale Anzahl an Blattläusen auf der Zimmerpflanze nach diesem mathematischen Modell erreicht wird.

Aufgabe 5 | 15 Punkte (6P+2P+3P+1.5P+2.5P)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 5x \cdot e^{-x+1}$$

a) Berechnen Sie die Nullstellen sowie die exakten Koordinaten der Extremal- und Wendepunkte. Der Nachweis, dass es sich wirklich um einen Wendepunkt handelt, wird nicht verlangt.

b) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f im Intervall [0;10]. Verwenden Sie die Punkte aus a) sowie mindestens drei weitere sinnvoll gewählte Punkte.

c) Berechnen Sie die Geradengleichung der Tangente an der Stelle $x = 4$ **exakt**.

d) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit

$$F(x) = (-5x - 5) \cdot e^{-x+1}$$

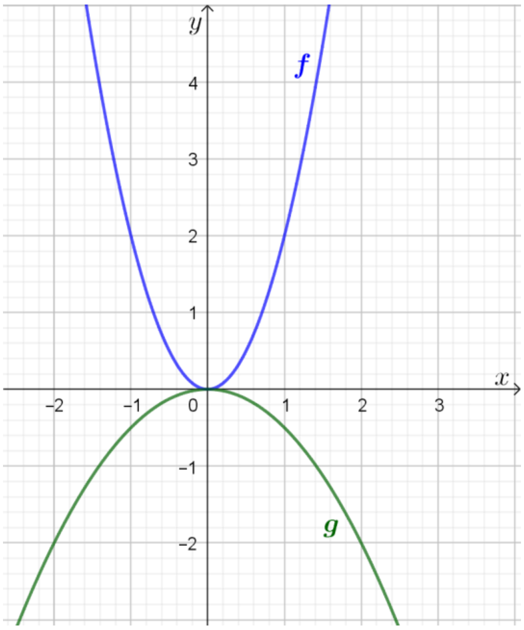
eine Stammfunktion der Funktion f ist.

e) Berechnen Sie den Inhalt der nach rechts unbegrenzten Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im 1. Quadranten einschliesst.

Aufgabe 6 | 12 Punkte (6P+6P)

Gegeben sind die beiden Funktionen f und g (siehe Abbildung).

$$f(x) = 2x^2 \qquad g(x) = -\frac{1}{2}x^2$$



a) Zwischen die Funktionsgraphen der Funktionen f und g wird ein Dreieck mit den Eckpunkten $A(x|g(x))$, $B(2|0)$ und $C(x|f(x))$ einbeschrieben.

Stellen Sie einen Term für die beschriebene Dreiecksfläche auf.

Für welchen Wert von x zwischen 0 und 2 wird der Inhalt dieser Fläche maximal?

b) Die Funktionen f und g werden nun durch die Einführung der Variablen a zu Funktionenscharen f_a und g_a verallgemeinert:

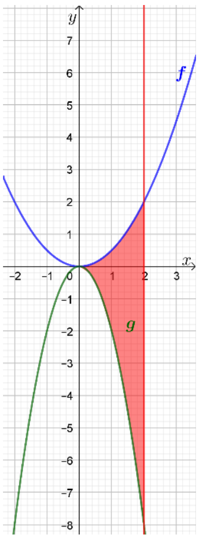
$$f_a(x) = ax^2 \quad g_a(x) = -\frac{1}{a}x^2 \quad \text{mit } a > 0$$

Sowohl für f_a als auch für g_a wird für a der gleiche Wert gewählt.

Eine Fläche wird eingeschlossen vom Graphen der Funktion f_a, der Linie $x = 2$ und dem Graph der Funktion g_a im 1. und 4. Quadranten. Sie sehen unten Beispielgrafiken für zwei verschiedene Werte von a.
Zeigen Sie, dass diese Fläche für den Wert $a = 1$ minimal wird. Die Überprüfung der Randwerte wird nicht verlangt.

Berechnen Sie für diesen Wert den Flächeninhalt.

$a = 0.5$



$a = 2$