Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe ein neues Blatt!**

Zeit: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung DMK
Taschenrechner TI83- und TI84-Modelle, TI-Nspire ohne CAS

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

---

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\dfrac{x^2+4x-5}{2x-6}$. (14 Punkte)

   a) Diskutieren Sie die Funktion f (Definitionsbereich, Nullstellen, Asymptoten, Extrema) und zeichnen Sie den Graphen.

   b) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

2. Gegeben sind die Kugel K mit Mittelpunkt $M(0/0/2)$ und Radius 2 sowie die Punkte $P(0/2/8)$ und $Q(0/–4/0)$. (14 Punkte)

   a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Kugel K.

   b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden t_1, die durch die Punkte P und Q definiert ist.
   Zeigen Sie: Die Gerade t_1 ist eine Tangente an K. Bestimmen Sie zudem den Berührungspunkt von t_1 an K.

   c) Neben t_1 gibt es eine zweite Tangente t_2 durch P an K, die in der yz-Ebene verläuft. Bestimmen Sie deren Gleichung.

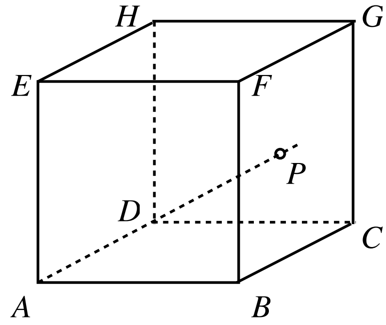
   Alle Tangenten durch den Punkt P an die Kugel K bilden einen Kreiskegel.
   Die Schnittfigur dieses Kegels mit der xy-Ebene ist ein Ellipse E.

   d) Erstellen Sie eine Zeichnung der Situation mit Koordinatenachsen, Kugel, Tangenten t_1 und t_2, Ellipse E.

   Welchen Namen hat die Kugel K im Rahmen der Kegelschnitttheorie?

   e) Bestimmen Sie die Hauptscheitelpunkte, den Mittelpunkt, die Brennpunkte und die Halbachsen von E.
   Hinweis: Für Teilaufgabe e) sind keine komplizierten Rechnungen nötig.

3. Von einem Würfel $ABCDEFGH$ (s. nebenstehende Zeichnung) kennt man die Punkte $A(0/{-4}/2)$ und $B(1/{-8}/10)$. Der Punkt D liegt auf der Strecke AP, wobei vom Punkt P die x- und die y-Koordinate bekannt sind: $P(16/4/?)$. Der Punkt E hat eine positive z-Koordinate. **11 Punkte**



   a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte C, D und E.

   b) M sei der Mittelpunkt der Kante AB.
   Wie gross ist im Dreieck CME der Winkel beim Punkt M?
   (Dieser Teil lässt sich mit Überlegen auch ohne das Resultat von a) lösen.)

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot x \cdot e^{b \cdot x^2}$ $(a \neq 0)$. **11 Punkte**
   Der Graph dieser Funktion hat in $P\left(\frac{1}{2} \middle/ \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ eine horizontale Tangente.

   a) Bestimmen Sie die Parameter a und b.

   Hinweis: Falls Sie Teil a) nicht lösen können, verwenden Sie im Folgenden $a = 3, b = -8$ (dabei ändern sich die Stellen mit horizontalen Tangenten).

   b) Untersuchen Sie die Funktion bezüglich Nullstellen, Symmetrie, Asymptoten, Maxima und Minima.
   Zeichnen Sie den Graphen von f in einem geeignet gewählten Koordinatensystem.

   c) Berechnen Sie den Inhalt der nach rechts offenen Fläche, welche vom Graphen von f und der x-Achse begrenzt wird.

5. Die folgenden beiden Teilaufgaben sind voneinander unabhängig. **12 Punkte**

5.1. Wir betrachten die komplexe Zahl $z = \frac{i \cdot \sqrt{3} - 1}{i - 1}$.

   a) Bestimmen Sie exakt den Realteil und den Imaginärteil von z.

   b) Welches ist die kleinste natürliche Zahl n, für welche z^n eine rein imaginäre Zahl ist?

5.2. Es sei die Funktion $f(z) = z^2 - 8z - 30i$ gegeben mit $z = x + i \cdot y$.

   Für die Mengen A und B gelten folgende Definitionen:

   $$A = \left\{ z \,\middle|\, \operatorname{Re} f(z) = 0 \right\} \quad \text{und} \quad B = \left\{ z \,\middle|\, \operatorname{Re} f(z) = 3 \cdot |z|^2 \right\} .$$

   Geben Sie für die Mengen A und B je eine Gleichung in x und y an.
   Benennen Sie die Kurven und zeichnen Sie diese in der Gauss-Ebene
   (Einheit $\hat{=}$ 2 Häuschen).

6. Nach all den Skandalen um Doping und Velosport ist die Branche jetzt fast von schwarzen Schafen befreit: Nur 3% der Fahrer, die an der berüchtigten Tour de Baselland teilnehmen, dopen mit Ope. Der Ope-Test liefert bei einem gedopten Fahrer mit 92% Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis. Bei einem nicht gedopten Fahrer fällt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 7% aber auch positiv aus. 12 Punkte

   a) Fahrer Weisse Weste dopt nie. Er wird bei allen 20 Etappen der Tour de Baselland auf Ope getestet. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Test mindestens einmal positiv ausfällt?

   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit p, dass der Ope-Test bei einem zufällig ausgewählten Teilnehmer positiv ausfällt?

   c) Eine Nachkontrolle zeigt, dass beim letztjährigen Sieger der Test positiv ausfällt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er mit Ope gedopt?

   Hinweis: Wenn Sie b) nicht lösen können, so rechnen Sie für d) mit $p = 0.09$ weiter.

   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Ope-Test bei höchstens 2 von 20 zufällig ausgewählten Teilnehmern positiv ausfällt?

   Ein Jahr später steht der neue Ope-Test zur Verfügung. Bei einem gedopten Fahrer gibt der Test immer noch mit 92% ein positives Ergebnis. Neu soll aber die Wahrscheinlichkeit, dass der Test bei einem nicht gedopten Fahrer trotzdem positiv ausfällt, weniger als 7% betragen. Dazu wird ein Versuch durchgeführt:

   e) Der Test gibt bei 6 von 150 getesteten nicht gedopten Fahrern ein positives Ergebnis.
   Testen Sie mit einen Signifikanzniveau 5% (d.h. Irrtumswahrscheinlichkeit ≤ 5%), ob der neue Test besser ist als der alte.

   Es wird Wert auf eine genaue Formulierung der Hypothesen gelegt.