**Aufgabe 1:** 14 Punkte

Gegeben ist die Funktion $f$ durch die Gleichung $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen, die Koordinaten des Hoch- und Tiefpunkts, sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen von $f$.

b) Die $y$-Achse, der Graph von $f$ und die Tangente an den Graphen von $f$ im Hochpunkt begrenzen im 1. Quadranten ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie dessen Inhalt.

Wir führen nun den Parameter $a \in \mathbb{R}$ ein und betrachten die Funktionenschar $f_a$, die durch die Gleichung $f_a(x) = -a x^3 + (a+1)x^2$ gegeben ist.

c) Zeigen Sie, dass der Graph von $f_a$ unabhängig von $a$ durch den Punkt $P(1 / 1)$ geht.

d) Bestimmen Sie den Wert des Parameters $a$ so, dass die Funktion $f_a$ an der Stelle $x = 4$ ein Maximum hat.

**Aufgabe 2:** 15 Punkte

Gegeben sind die Punkte

$A(8 / 11 / 11)$ $C(-1 / -1 / -1)$

$P(5 / -1 / -13)$ $Q(13 / 7 / -9)$

Die Gerade $g$ geht durch die Punkte $A$ und $P$.

Die Gerade $h$ geht durch die Punkte $C$ und $Q$.

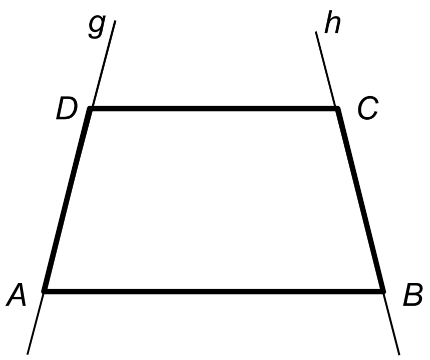
a) Bestimmen Sie die Gleichungen der Geraden $g$ und $h$.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts $S$ der beiden Geraden.

c) Unter welchem Winkel $\alpha$ schneiden sich die beiden Geraden $g$ und $h$?

d) Die Geraden $g$ und $h$ liegen beide in der Ebene $E$. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene $E$.

e) Die oben gegebenen Punkte $A$ und $C$ sind Eckpunkte eines gleichschenkligen Trapezes $ABCD$. Die Punkte $A$ und $D$ liegen auf der Geraden $g$. Die Punkte $B$ und $C$ liegen auf der Geraden $h$. Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte $B$ und $D$.




$\overline{AD} = \overline{BC}$

**Aufgabe 3:** 12 Punkte

Gegeben ist ein Glücksrad mit den Zahlen 1 bis 9. Alle Zahlen treten gleich wahrscheinlich auf.

Das Glücksrad wird 3 Mal gedreht. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

a) Alle 3 Zahlen sind gerade.

b) Alle 3 Zahlen sind verschieden.

c) Mindestens eine Zahl ist grösser als 6.

d) Es treten genau 2 verschiedene Zahlen auf.

Nun wird das Glücksrad 80 Mal gedreht.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis mindestens 15 Mal, aber nicht mehr als 26 Mal eine Quadratzahl ist?

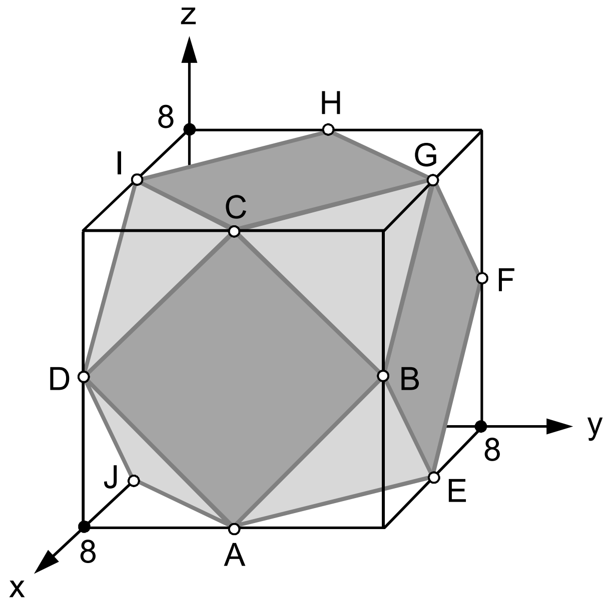
Zuletzt spielen Walter und Gabriel das Spiel „Würfel gegen Glücksrad“:

Walter bezahlt einen Einsatz von 2 Franken. Danach dreht Gabriel das Glücksrad und gibt so eine Zahl vor, die Walter mit einem regulären Spielwürfel in 3 Versuchen mindestens einmal zu „erwürfeln“ hat. Gelingt dies Walter, so erhält er seinen Einsatz zurück plus zusätzlich 4 Franken. Andernfalls ist der Einsatz verloren.

f) Welchen Gewinn bzw. welchen Verlust kann Walter bei diesem Spiel auf lange Sicht erwarten?

**Aufgabe 4:** 12 Punkte

Verbindet man die Mittelpunkte der Kanten eines Würfels gemäss untenstehender Abbildung, so erhält man ein Kuboktaeder.




a) Wie viele Seitenflächen, Kanten und Ecken hat ein Kuboktaeder?

Beachten Sie, dass in allen folgenden Teilaufgaben der Würfel, wie oben abgebildet, Kantenlänge 8 hat.

b) Berechnen Sie die Länge einer Kante des Kuboktaeders.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene $E_1$, die durch die Eckpunkte *C*, *D* und *I* geht.

d) Welche Eckpunkte des Kuboktaeders liegen in der Ebene $E_2$?

$$E_2: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e) Vom Punkt *P*(14 / 13 / 14) wird ein Lot auf die Ebene $E_2$ gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfusspunkts.

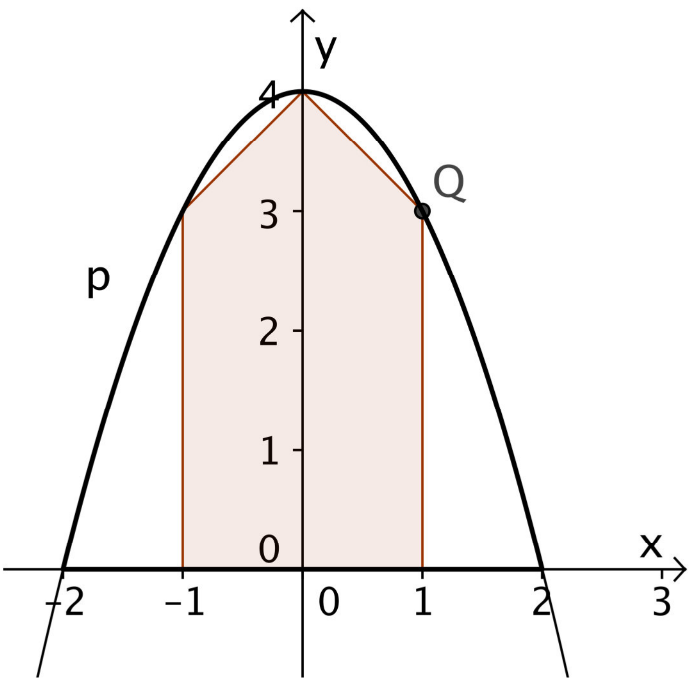
**Aufgabe 5:** 8 Punkte

Einem parabelförmigen Bogen wird eine zur *y*-Achse symmetrische 'hausförmige' Fläche wie abgebildet einbeschrieben.

a) Wie lautet die Gleichung der unten abgebildeten Parabel *p*?

b) Zunächst befinde sich eine Ecke der Fläche bei *Q*(1 / 3). Wie gross ist der Inhalt der Fläche?

c) Die Position des Punkts *Q* kann auf dem Parabelbogen variiert werden; dabei kann die *x*-Koordinate von *Q* Werte zwischen 0 und 2 annehmen.
Wie muss die *x*-Koordinate von Q gewählt werden, damit der Inhalt der Fläche maximal wird?



**Aufgabe 6:** 14 Punkte

Gegeben ist die Funktion *f* durch die Gleichung $f(x) = 4 \cdot ln(e - x)$.

a) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen von *f* mit den Koordinatenachsen. Geben Sie die Koordinaten exakt an.

b) Wir betrachten nun die Normale im Schnittpunkt des Graphen von *f* mit der *y*-Achse. Wie lautet ihre Gleichung?
Unter welchem Winkel schneidet die Normale die y-Achse?

c) Bestätigen Sie durch eine Rechnung, dass die durch $g(x) = e - e^{0.25x}$ gegebene Funktion *g* die Umkehrfunktion von *f* ist.

d) Der Graph der Funktion *f* begrenzt im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen eine endliche Fläche. Wird diese um die ***y*-Achse** gedreht, dann entsteht ein Körper, der an den Kelch eines auf dem Kopf stehenden Sektglases erinnert.
Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers.

Hinweis: Vor der Auswertung des Rotationsintegrals sollten Sie den Funktionsterm erst ausmultiplizieren!