BASEL LANDSCHAFT
BILDUNGS-, KULTUR- UND SPORTDIREKTION
GYMNASIUM OBERWIL

Maturprüfung 2023
Mathematik – Grundlagenfach

Klasse / Kurs:	4b / 4c / 4d / 4e / 4f / 4g / 4h
Zeit:	4 Stunden
Anzahl Seiten: **(ohne Deckblatt)**	6
Inhalt:	Maturitätsprüfung 2023, Mathematik schriftlich, Grundlagenfach Aufgabe 1: Analysis, 17 Punkte Aufgabe 2: Vektorgeometrie, 16 Punkte Aufgabe 3: Analysis, 12 Punkte Aufgabe 4: Stochastik, 14 Punkte Aufgabe 5: Analysis, 9 Punkte
Anweisungen/ Erläuterungen:	Verwenden Sie **für jede Aufgabe ein neues Blatt**.
Hilfsmittel:	Formelsammlung Mathematik kompakt (deutsch oder englisch) (Adrian Wetzel / ISBN: 978-3-9523907-5-7) Taschenrechner Ti-30X Pro MultiView oder Ti-30X Pro MathPrint
Bewertung:	Maximal 68 Punkte Die erreichbare Punktzahl ist bei jeder Aufgabe angegeben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

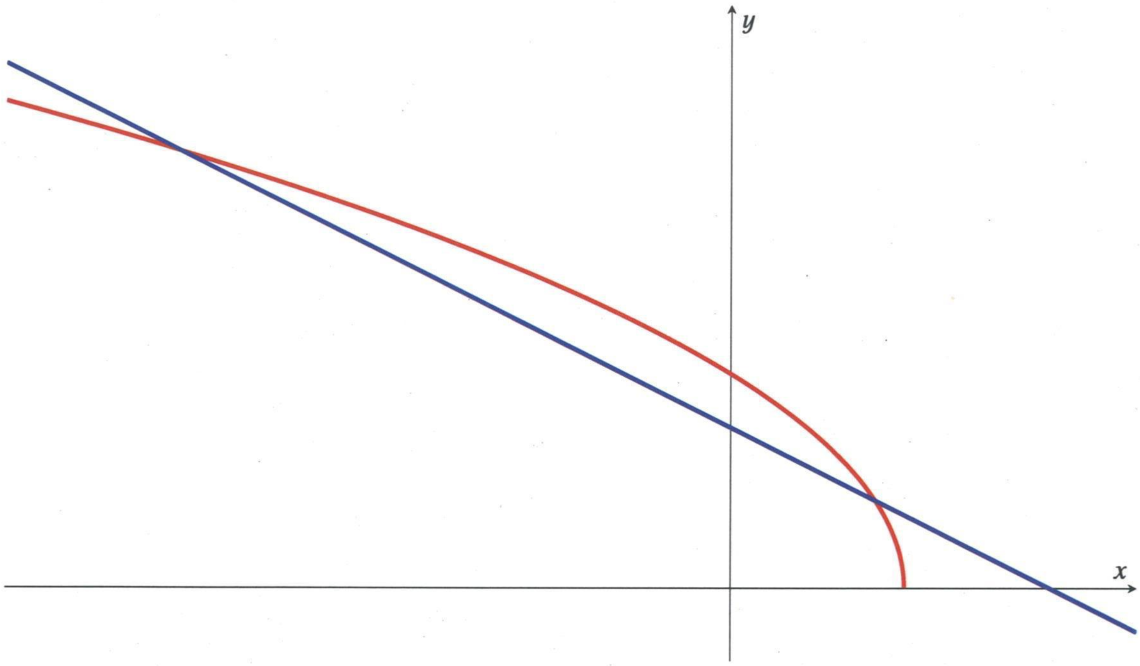
Bevor Sie mit dem Lösen der Aufgaben beginnen, kontrollieren Sie bitte, ob die Prüfung gemäss obiger Aufstellung vollständig ist. Sollten Sie der Meinung sein, dass etwas fehlt, melden Sie dies bitte **umgehend** der Aufsicht.

Aufgabe 1 2 + 2 + 3 + 4 + 3 + 3 = **17 Punkte**

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = 6\sqrt{6-x}$$
$$g(x) = -x + 11$$

Die Graphen der beiden Funktionen sind in der Abbildung dargestellt. Beachten Sie, dass in der Abbildung die x- und die y-Achse unterschiedlich skaliert sind.



a) Bestimmen Sie die Nullstellen der beiden Funktionen.

b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion g die y-Achse?

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen der beiden Funktionen.

d) (i) In welchem Punkt P ist die Tangente t an den Graphen der Funktion f parallel zu der Geraden g?

(ii) Geben Sie die Gleichung der Tangente t an.

e) Die Graphen von f und g sowie die x-Achse begrenzen im ersten Quadranten eine Fläche.

Berechnen Sie deren Inhalt.

f) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen im Intervall von einer unteren Grenze a bis zur Nullstelle der Funktion eine Fläche. Für welchen Wert des Parameters a hat das Rotationsvolumen dieser Fläche um die x-Achse den Wert $1800 \cdot \pi$?

Aufgabe 2 $2 + 2 + 2 + 2 + 3 + 5 =$ **16 Punkte**

An einer Hauswand befindet sich ein Vordach $ABCD$ (siehe Zeichnung).

a) Für das Vordach gilt: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Berechnen Sie mit den Angaben aus der Zeichnung die Koordinaten der Ecke B.

b) Zeigen Sie, dass die Vordachfläche ein Rechteck ist, und berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

c) Die Vordachfläche liegt in der Ebene ε_1.

Berechnen Sie eine Koordinatengleichung von ε_1.

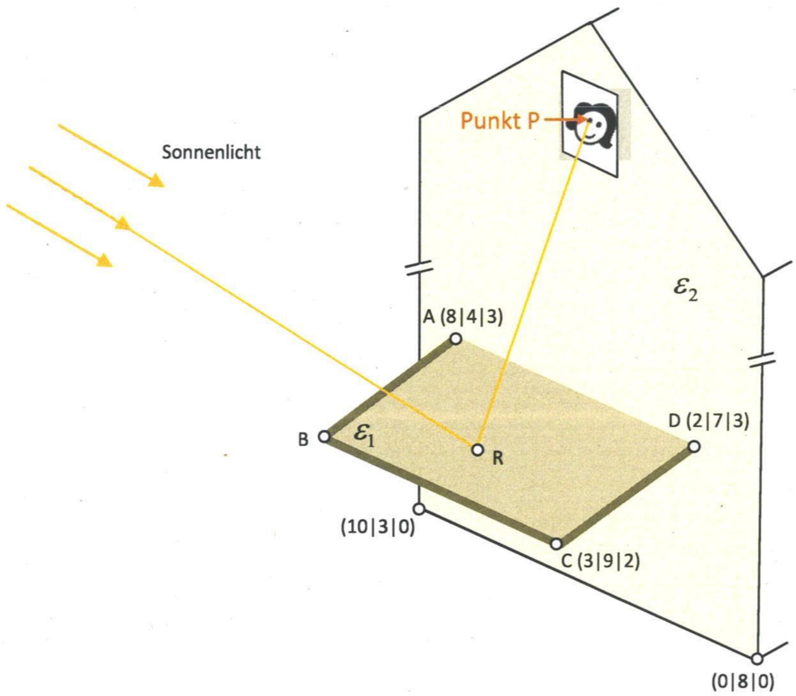
(Zur Kontrolle: $\varepsilon_1: x + 2y + 5z - 31 = 0$. Die hier angegebene Gleichung darf nicht für die Lösung dieser Teilaufgabe verwendet werden.)

d) Um welchen Winkel ist die Vordachfläche gegenüber der x-y-Ebene (Bodenfläche) geneigt?

e) Gegen Mittag fällt das Sonnenlicht parallel zum Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf das Vordach und wirft einen Schatten. Entscheiden Sie durch eine Rechnung, ob der Schatten des Punktes C auf der Hauswand sichtbar ist. Die Hauswand liegt in der Ebene $\varepsilon_2: x + 2y + 0z - 16 = 0$.

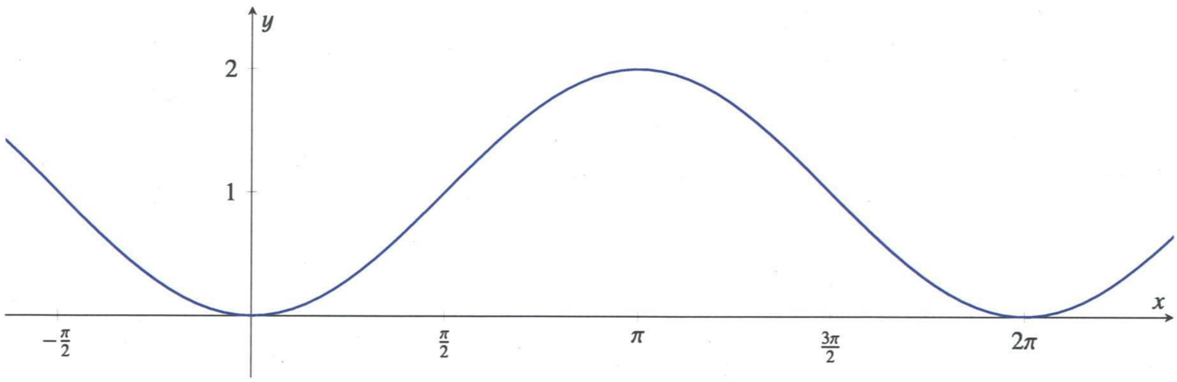
f) Etwas später am Tag schaut eine Hausbewohnerin aus dem Fenster (siehe Zeichnung) auf das Vordach hinunter, das eine spiegelnde Oberfläche hat. Dabei wird sie von einem Sonnenstrahl geblendet, der von der Vordachfläche reflektiert wird. Das geblendete Auge der Hausbewohnerin befindet sich im Punkt $P(4\,|\,6\,|\,15)$. Wegen der fortgeschrittenen Zeit ist die Einfallsrichtung des Sonnenlichts nun parallel zum Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den Reflexionspunkt R des Sonnenstrahls auf dem Vordach.



Aufgabe 3 1.5 + 2.5 + 2 + 2 + 2 + 2 = **12 Punkte**

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 1 - \cos x$.



a) Die Gerade g ist eine Tangente an den Graphen von f, welche diesen bei $x = \dfrac{\pi}{6}$ berührt.

Berechnen Sie die Steigung der Geraden g.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Bereich von $x = 0$ bis $x = \dfrac{\pi}{2}$ **exakt**.

c) Es wird eine zufällige x-Koordinate u im Bereich $0 \leq u \leq \dfrac{\pi}{2}$ gewählt.

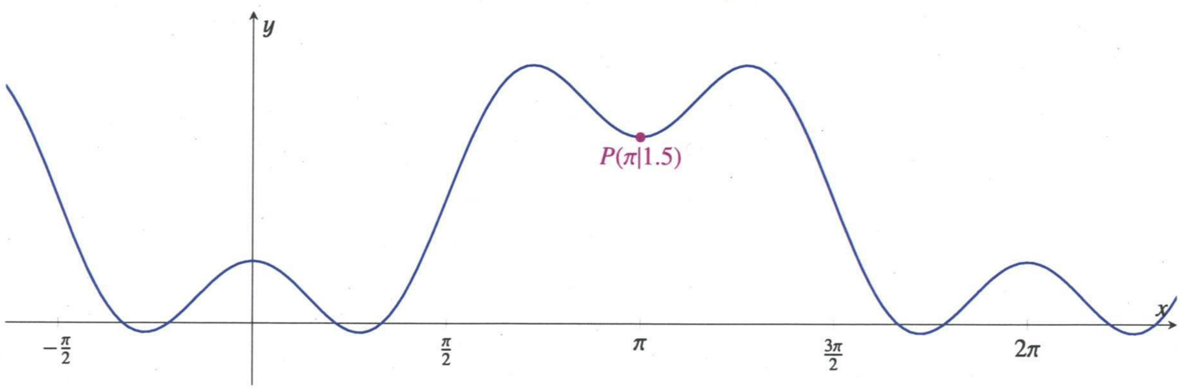
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Punkt $P(u \mid 0.5)$ oberhalb des Funktionsgraphen liegt?

Wir betrachten nun die Funktionenschar $f_a(x) = 1 - \cos(x) + a \cdot \cos(3x)$.

d) Wie gross muss der Parameter a gewählt werden, damit sich der Funktionsgraph aus der unten stehenden Abbildung ergibt?

e) Für welchen Wert von a besitzt der Graph von f_a bei $x = \dfrac{\pi}{2}$ eine waagrechte Tangente?

f) Für welche Werte von a gilt $f_a''(0) > 0$?



Aufgabe 4
Diese Aufgabe besteht aus zwei unabhängigen Teilen 4.1 und 4.2.

Aufgabe 4.1 $1 + 1 + 3 + 2 + 3 =$ **10 Punkte**

Anna und Basil haben folgende 5 Spielkarten gefunden:

Herz 7	Schaufel 7	Herz 9	Schaufel 9	Eck-Ass
Kartenwert 7	Kartenwert 7	Kartenwert 9	Kartenwert 9	Kartenwert 11

a) Zuerst zieht Anna vier Mal zufällig eine der fünf Karten (mit Zurücklegen).
Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht sie nie das Ass?

Jetzt mischen sie die 5 Karten erneut und verteilen sie. Anna erhält 2 Karten, Basil 3.

b) Zeigen Sie, dass es 10 Möglichkeiten für die beiden Karten gibt, die Anna erhält.

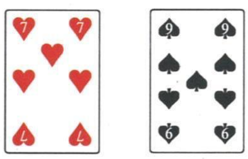
c) Anna berechnet die Summe der Kartenwerte der beiden Karten, die sie erhält.
Wie gross ist der Erwartungswert für diese Summe?

d) Von den drei Karten, die Basil erhält, haben zwei denselben Kartenwert. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter dieser Bedingung das Ass unter den beiden Karten ist, die Anna erhält.

e) Anna und Basil beschliessen, nach folgenden Regeln ein Spiel zu spielen:

- Zuerst werden die Karten gemischt und verteilt. Anna erhält 2 Karten, Basil 3.
- Im ersten Spielzug zieht Anna von Basil eine Karte. Im zweiten Spielzug zieht Basil von Anna eine Karte. Im dritten Spielzug zieht wieder Anna von Basil, usw.
- Wer zu irgendeinem Zeitpunkt zwei Karten von gleichem Wert (also beide Siebener oder beide Neuner) in den Händen hat, darf diese Karten sofort ablegen. Die abgelegten Karten sind nicht mehr im Spiel. Sobald jemand keine Karten mehr in den Händen hat, endet das Spiel und die Person ohne Karten gewinnt.

Anna hat beim Verteilen die Herz 7 und die Schaufel 9 erhalten:



Nach zwei Spielzügen steht fest, dass entweder (i) Anna gewonnen hat oder dass (ii) Basil sicher gewinnen wird oder dass (iii) wieder die Ausgangssituation vor Zug 1 besteht.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die drei Fälle (i), (ii) und (iii).

Aufgabe 4.2 $2 + 2 =$ **4 Punkte**

Bei einem Kartenspiel (ähnlich wie in Aufgabe 4.1) wollen Anna und Basil vor jeder Runde mit einem Münzwurf festlegen, wer beginnen darf (und fürs Spiel leicht im Vorteil ist). Sie legen fest: Wird Kopf geworfen, beginnt Anna. Bei Zahl beginnt Basil.
Nach einigen Spielrunden kriegt Anna den Eindruck, dass Basil zu oft beginnen darf. Ist die Münze wohl zu ihren Ungunsten gezinkt? Anna beschliesst, eine Statistik zu führen. In den folgenden 12 Runden darf Basil tatsächlich 8 Mal beginnen.

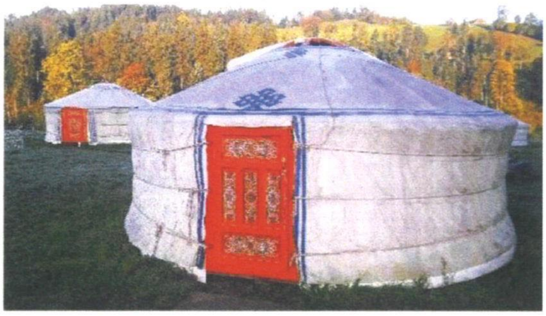
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erscheint bei 12 Münzwürfen 8 Mal oder häufiger Zahl, wenn die Münze fair ist?

b) Anna beschliesst, die Statistik noch weiter zu führen. Wie oft muss beim Münzwurf in 20 Runden mindestens Zahl erscheinen, damit sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% davon ausgehen kann, dass die Münze zu oft Zahl anzeigt?

Aufgabe 5 1.5 + 2.5 + 5 = **9 Punkte**

Die Jurte ist das traditionelle Zelt der Nomaden in der Mongolei.

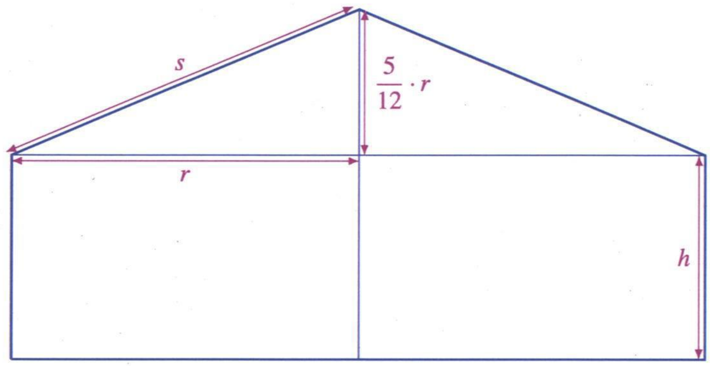
Eine mongolische Jurte betrachten wir als Zylinder mit aufgesetztem Kegeldach.



Bei diesem Typ Jurte gilt für die Kegelhöhe ungefähr

$$h_{\text{Kegel}} = \frac{5}{12} \cdot r$$

(siehe Zeichung).



a) Eine Jurte hat einen Radius von 3 m und eine Randhöhe (= Zylinderhöhe h) von 1.8 m.

Wie gross ist ihr Volumen?

b) Zeigen Sie, dass für die Oberfläche A der Jurte (der Jurtenboden zählt nicht dazu) die folgende Formel gilt:

$$A = \frac{13}{12}\pi r^2 + 2\pi r h$$

c) Mongolische Jurten sind extremen Wetterverhältnissen ausgesetzt. Damit es möglichst wenig Energieverlust gibt, muss ihre Oberfläche bei gegebenem Volumen möglichst klein sein.

Eine Jurte soll das Volumen $V = 50 \text{ m}^3$ haben. Berechnen Sie den Radius r und die Zylinderhöhe h so, dass die Oberfläche dieser Jurte (ohne Jurtenboden) minimal wird.

Wie gross ist diese minimale Oberfläche?

Hinweis: Die Art des Extremums und die Randwerte müssen nicht untersucht werden.