

# Mathematik

**Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe ein neues Blatt!**

Wenn nicht anders verlangt, geben Sie Resultate exakt an. Falls Sie Näherungen angeben, runden Sie auf 4 signifikante Ziffern.

**Zeit:** 4 Stunden

**Hilfsmittel:** Formelsammlung DMK *Begriffe Formeln Tabellen*  
Taschenrechner TI-nspire CAS

**Bewertung:** Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben. Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

1. Gegeben sind die Punkte A(1 / 2 / 1) und B(9 / 6 / 9) sowie die

11 Punkte
-----------

$$\text{Gerade } g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- a) Liegt der Punkt B auf der durch A und g definierten Ebene?
- b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C auf g so, dass ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C ist.
- c) Wie muss der Punkt D auf g gewählt werden, damit ABD ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis AB ist?
- d) Schliesslich sollen Sie den Punkt F auf g so finden, dass das Dreieck ABF einen minimalen Flächeninhalt aufweist.
2. Gegeben ist die Funktion  $f(x) = \frac{16}{(x-2)^2}$ .

9 Punkte
----------

- a) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich  $-4 < x < 8$  und geben Sie die Gleichungen seiner Asymptoten an.
- b) P ist der Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit der y-Achse. Eine Gerade t durch den Punkt P berührt diesen Graphen im Punkt  $B \neq P$ . Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes B.
- c) Bestimmen Sie die y-Koordinate des Punktes S(2/...) derart, dass die Geraden SB und SP einen rechten Winkel einschliessen.

*Falls Sie den Punkt B in Teilaufgabe b) nicht bestimmen konnten, wählen Sie für die Teilaufgabe c) den nicht auf dem Graphen von f liegenden Punkt  $B^*(8 / 1)$ .*

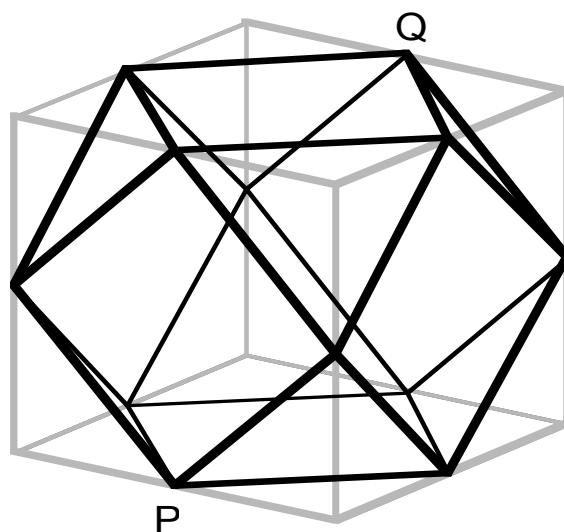
3. Verbindet man die benachbarten Kantenmitten eines Würfels, so erhält man ein sog. **Kuboktaeder**.

13 Punkte

Es besteht aus 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken.

Die Quadrate dieses Kuboktaeders werden mit den Zahlen 1 bis 6 beschriftet, die Dreiecke mit den Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H.

Die Wahrscheinlichkeit, eine der Zahlen zu werfen, sei für jede der Zahlen gleich gross, nämlich  $\frac{1}{9}$ . Auch für jeden Buchstaben ist die Wahrscheinlichkeit gleich gross.



- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit einem solchen Kuboktaeder einen bestimmten Buchstaben zu werfen.
- b) Nun werden 8 solche Kuboktaeder miteinander geworfen. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:
- Es werden genau drei Einer geworfen.
  - Es werden mindestens drei Buchstaben geworfen.
- c) In welchem Bereich liegt die Anzahl Buchstaben bei 120 Würfeln eines Kuboktaeders mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit 95.5 %?
- d) Hans und Fritz spielen folgendes Spiel:  
Jeder wirft ein Kuboktaeder. Zeigen beide Zahl, so erhält Hans die Augensumme in Fr.; zeigen beide Buchstaben, so erhält Fritz k Franken. In jedem andern Fall wird erneut geworfen. Für welchen Wert von k ist das Spiel fair?
- e) Ein Käfer krabbelt entlang der Kanten eines solchen Kuboktaeders von P nach Q. In jedem Eckpunkt entscheidet er sich zufällig, welche Kante er als nächstes wählt. Der Käfer kann auch die gleiche Kante zurück krabbeln. Für jede Kante braucht er 1 Minute.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit braucht er für den Weg von P nach Q
- drei Minuten
  - 4 Minuten?

**Keine Wahrscheinlichkeitsaufgabe:**

3 Punkte

- f) Die Kantenlänge eines Kuboktaeders sei 1.  
Berechnen Sie den Abstand zweier gegenüberliegender Dreiecke.

4. Die Gleichung  $t \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 - 48x - 72y + 144 = 0$  definiert für jeden reellen Parameter  $t$  einen Kegelschnitt.

11 Punkte

a) Wählen Sie  $t = 4$  und bestimmen Sie die Art des Kegelschnitts sowie sämtliche wesentlichen Eigenschaften (Mittelpunkt, Hauptscheitel, Brennpunkte, Richtung der Hauptsymmetrieachse, ev. Asymptoten) der zugehörigen Kurve in der  $x$ - $y$ -Ebene. Skizzieren Sie die Kurve.

b) Verfahren Sie wie in a) für den Parameterwert  $t = 0$ .

c) Nun wird wieder der Fall  $t = 4$  betrachtet. Gewisse Nullpunktsgerechten mit der Gleichung  $y = m \cdot x$  schneiden diese Kurve in zwei Punkten A und B. Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Kurve (ohne Interpretation!), auf der alle Mittelpunkte der Strecken AB liegen.

5. Wir betrachten für  $k > 0$  die Funktion

12 Punkte

$$f_k(x) = 4 \cdot e^{k \cdot x} - e^{2k \cdot x} = e^{k \cdot x} \cdot (4 - e^{k \cdot x})$$

a) Diskutieren Sie den Graphen dieser Funktion bezüglich Nullstellen, Extrema (mit einer Begründung für Maximum oder Minimum), Wendepunkte und Asymptoten. Zeichnen Sie für  $k = \frac{1}{2}$  den Graphen im Bereich  $-5 < x < 3$ .

b) Der Graph der Funktion  $f_k$  und die  $x$ -Achse begrenzen eine sich nach links ins Unendliche erstreckende Fläche. Zeigen Sie, dass die Gerade  $y = 3$  den Inhalt dieser Fläche in einem von  $k$  unabhängigen Verhältnis teilt und bestimmen Sie dieses Verhältnis.

6. Wir betrachten die komplexe Funktion

7 Punkte

$w = u + iv = f(z) = a \cdot z^2 + b$  mit den komplexen Parametern  $a$  und  $b$ . Durch diese Funktion werden die Punkte  $z = x + iy$  der Gaußschen Zahlenebene abgebildet.

a) Bestimmen Sie  $a$  und  $b$  so, dass  $i$  Fixpunkt dieser Abbildung ist und ausserdem gilt:  $f(1+i) = 3+2i$ .

b) Bestimmen Sie das Bild der reellen Achse. Skizzieren Sie das Bild.

c) Welche Punkte werden auf die Gerade  $v = -u$  abgebildet? Skizzieren Sie diese Punktmenge.

Falls Sie a) nicht lösen können, wählen Sie für die Teilaufgaben b) und c) die Funktion  $w = u + iv = f(z) = (1+i) \cdot z^2 + 1$ .