

Mathematik

Hilfsmittel: DMK-Formeln und Tafeln, Taschenrechner TI-84 (Speicher gelöscht)

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

Aufgabe 1: Exponentialfunktion

5+7=12 Punkte

Gegeben sind die beiden Kurven

$$K_1: y = ae^{-x} \quad \text{und} \quad K_2: y = e^{\frac{1}{3}x} \quad (a > 0)$$

- Bestimmen Sie a so, dass sich die beiden Kurven rechtwinklig schneiden.
- Rechnen Sie mit dem für a gefundenen Wert weiter: Die Koordinatenachsen und die beiden Kurven begrenzen im ersten Quadranten ein Flächenstück, welches sich nach rechts unbegrenzt erstreckt. Wie gross ist der Flächeninhalt?
(Falls Sie a nicht lösen konnten, verwenden Sie den Wert $a=8$.)

Aufgabe 2: Vektoren und Geraden

2+3+3+4=12 Punkte

Gegeben sind die Punkte $A(4|0|3)$, $B(0|5|0)$ und $C(-3|0|4)$

- Zeigen Sie: Das Dreieck ABC ist gleichseitig
- A , B und C definieren eine Ebene E . Gesucht ist die Spurgerade von E in der xy -Ebene
- Das Koordinatensystem sei so ausgerichtet, dass die z -Achse senkrecht nach oben zeigt.
Geben Sie eine Parametergleichung an für die **steilste** Gerade g , welche durch den Punkt B geht und in der Ebene E liegt.
- In welchem Verhältnis teilt g die Dreiecksfläche?

Aufgabe 3: Komplexe Zahlen

2+2+2=6 Punkte

Wir betrachten die Iterationsfolge in der Gaußschen Zahlenebene mit einem Startwert $z_1 \in \mathbb{C}$ und der Iterationsvorschrift

$$z_{n+1} = f(z_n) = i \cdot (z_n + 1 + i); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Geben Sie die Menge der Fixpunkte an.
- Zeigen Sie: Es gibt keine 2-periodischen Punkte.
(z_1 heisst 2-periodischer Punkt, wenn gilt: $z_{n+2} = z_n$ und $z_{n+1} \neq z_n$ für $n = 1, 2, 3, \dots$)
- Zeigen Sie: Alle Punkte der Gaußschen Zahlenebene, welche keine Fixpunkte sind, sind periodische Punkte mit Periodenlänge 4.
(d.h. $z_{n+4} = z_n$ und $z_{n+1}, z_{n+2}, z_{n+3} \neq z_n$)

Aufgabe 4: Tangente

4+4=8 Punkte

Wir betrachten die Kurve

$$y = \frac{a}{x} \quad \text{mit } a > 0$$

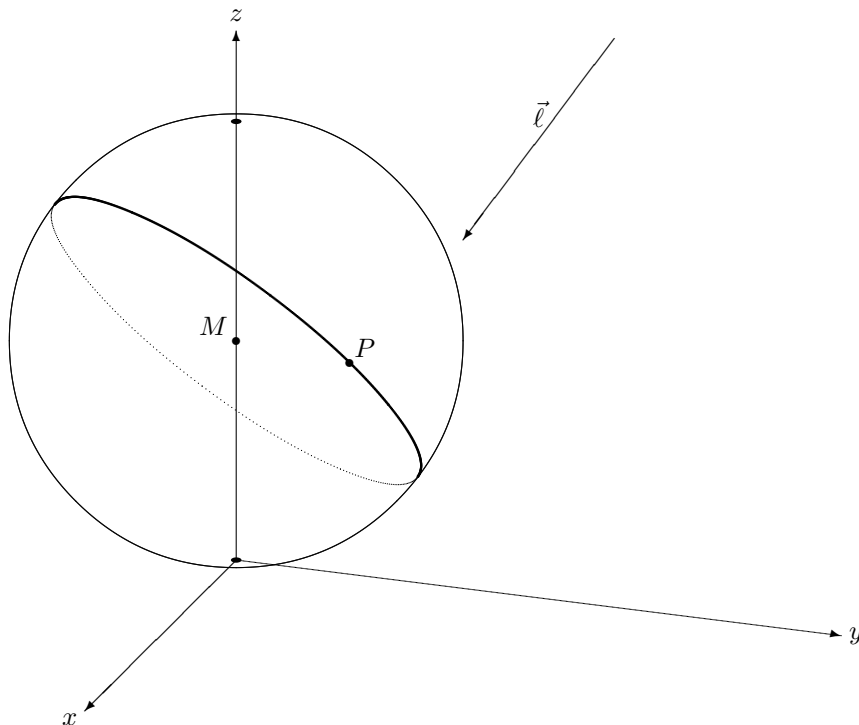
In einem beliebigen Kurvenpunkt $P(x_0|?)$ des ersten Quadranten wird die Tangente gebildet.

- Die Tangente bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeigen Sie, dass dessen Flächeninhalt unabhängig ist von der Lage des Kurvenpunktes $P(x_0|?)$.
- Für welchen Kurvenpunkt ist die Länge des Tangentenabschnittes, der mit den beiden Koordinatenachsen gebildet wird, minimal?

Aufgabe 5: Vektoren und Kegelschnitte

2+2+3+1+4=12 Punkte

Eine Kugel mit Radius $r = 12$ und Mittelpunkt $M(0|0|12)$ steht auf der xy -Ebene. Sie wird von **parallel** einfallenden Lichtstrahlen mit Richtungsvektor $\vec{\ell} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix}$ beleuchtet und wirft einen Schatten auf die xy -Ebene.



- Für diese Teilaufgabe sei die Kugel transparent. Geben Sie eine Parametergleichung an für den Schatten, den die z -Achse in die xy -Ebene wirft
- Die Hälfte der Kugel ist beleuchtet, die andere Hälfte dunkel. Stellen Sie die Koordinatengleichung derjenigen Ebene E auf, in welcher die Licht-Schatten-Grenze liegt.
- Der Punkt $P(?!|12)$ ist einer der beiden Punkte auf der Licht-Schatten-Grenze, welche grössten horizontalen Abstand von M haben. Berechnen Sie die Koordinaten von P (eine Lösung genügt).
- In welchem Winkel φ treffen die Lichtstrahlen in der xy -Ebene auf?
- Nun betrachten wir den elliptischen Schatten, den die Kugel auf die xy -Ebene wirft. Berechnen Sie
 - die Länge der grossen und kleinen Halbachse
 - die Koordinaten desjenigen Punktes S des Schattens, welcher von $(0|0|0)$ am weitesten entfernt ist
 - die Koordinaten der Brennpunkte

Aufgabe 6: Sinus und Grenzwert

6 Punkte

Unter welchen Winkeln schneidet der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = \sin(\sqrt{x})$$

die x -Achse im Intervall $0 \leq x \leq \pi^2$?

Falls notwendig, führen Sie Grenzwertbetrachtungen durch!

Aufgabe 7: Stochastik

2+1+5+4=12 Punkte

Anna, Bernd und Cécile haben Lust auf ein Würfelspiel, aber niemand hat einen Würfel dabei. Also schlägt Anna vor: “Wir werfen gleichzeitig einen Einfränkler, einen Zweifränkler und einen Fünfliber. Wenn die Summe der sichtbaren Zahlen eine der Zahlen 1, 2, 3, 5 oder 6 ist, so nehmen wir sie als ‘Augenzahl’. Sonst werfen wir die drei Münzen erneut.” (s. *nachstehende Abb.*)

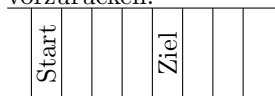
- \mapsto nochmals werfen \mapsto 5
- \mapsto 1 \mapsto 6
- \mapsto 2 \mapsto nochmals werfen
- \mapsto 3 \mapsto nochmals werfen

a) Anna versucht ihre Freunde von diesem System zu überzeugen: “Ich garantiere euch eine Wahrscheinlichkeit von 98%, dass ihr höchstens k Mal werfen müsst, um eine gültige ‘Augenzahl’ zu bekommen.”

Wie gross ist die Zahl k in Annas Aussage (unter der Annahme, dass die drei Münzen ideal sind)?

b) Bernd sagt: “Ich finde das System blöd. Da produzieren wir ja die halbe Zeit ungültige Würfe!” Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von 80 durchgeführten Würfeln 40 oder mehr ungültig sind (d.h. keine brauchbare ‘Augenzahl’ liefern).

c) Im Würfelspiel geht es darum, dass man seine Spielfigur um so viele Felder nach rechts vorrücken darf, wie der ‘Würfel’ Augen zeigt. Deswegen hat auch Cécile etwas auszusetzen: “Mich stört, dass man zu wenig Chancen hat, mit einem oder mehreren Würfeln um genau 4 Spielfelder vorzurücken.”



(c1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spielfigur, die im Feld “Start” steht, durch ein- oder mehrmaliges Erzeugen einer ‘gültigen Augenzahl’ nach Annas System ins Feld “Ziel” zu stehen kommt?

(c2) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dasselbe mit einem (als ideal angenommenen) gewöhnlichen Spielwürfel zu erreichen?

d) Anna hat über die Häufigkeit der erzielten ‘Augenzahlen’ eine Strichliste geführt, die nach einer Weile wie folgt aussieht:

1	2	3	5	6
38	55	51	29	37

(Die ungültigen Würfe sind auf der Strichliste nicht erfasst). Total: 210 gültige Würfe

Laut Anna legen diese Zahlen die Vermutung nahe, dass der Zweifränkler “Zahl” und “Helvetia” nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigt.

Testen Sie diese Vermutung auf dem 95.5%-Niveau.

(Auf präzise formulierte Hypothesen wird Wert gelegt!)

Lösungen

1. Exponentialfunktion

a) $ae^{-x} = e^{\frac{1}{3}x} \Leftrightarrow \ln a = \frac{4}{3}x$; Schnittpunkt bei $x = \frac{3}{4} \ln a$;
 $f'(x) = -ae^{-x}$; $g'(x) = \frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}$; $m_1 = -\frac{1}{m_2} \Rightarrow -ae^{-x} = -\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x}} \Rightarrow e^{-\frac{2}{3}\frac{3}{4}\ln a} = \frac{3}{a} \Rightarrow a = 9$

b) Graphen schneiden sich bei $x = \frac{3}{4} \ln 9$.

$$\text{Flächeninhalt } A_1 = \int_0^{\frac{3}{4} \ln 9} e^{\frac{1}{3}x} dx = 3 \left(e^{\frac{1}{3}\frac{3}{4}\ln 9} - 1 \right) = 3(9^{\frac{1}{4}} - 1) = 2.196\ 152$$

$$A_2 = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_{\frac{3}{4} \ln 9}^b 9e^{-x} dx = 9e^{-\frac{3}{4}\ln 9} = 1.732\ 051$$

$$A_1 + A_2 = 3.928\ 203$$

2. Vektoren und Geraden

a) Zeige: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ und Zwischenwinkel $\varphi = 60^\circ$:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{16 + 25 + 9} = \sqrt{50}; \quad |\overrightarrow{AC}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{49 + 0 + 1} = \sqrt{50}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} \right) = \arccos \left(\frac{28 + 0 - 3}{50} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = 60^\circ$$

b) B gehört zur Spurgeraden; ebenso der Durchstosspunkt der Geraden g_{CA} .

$$g_{CA}: \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad z \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow t = 4; \quad \text{Durchstosspunkt } D(25|0|0)$$

$$\text{Spurgerade (=Gerade durch } B \text{ und } D): \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alternative Lösung: Ebenengleichung von } E \text{ aufstellen; } \vec{n}_E = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Ebenengleichung: $x + 5y + 7z - 25 = 0$; daraus einen weiteren Punkt mit $z = 0$ gewinnen...

c) g muss folgende Bedingungen erfüllen: $g \perp \vec{n}_E$ und $g \perp \vec{v}_{Spur}$.

$$\vec{v}_g = \vec{v}_{Spur} \times \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -35 \\ 26 \end{pmatrix}; \quad g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -35 \\ 26 \end{pmatrix}$$

d) Schneiden g mit g_{CA} (siehe Teilaufgabe b)):

$$g \cap g_{CA}: \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -35 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: aus u kann man direkt ablesen, in welchem Verhältnis der Schnittpunkt P die Strecke \overline{CA} teilt!

$$\text{Aus } y\text{-Gleichung: } 5 - 35t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{7}; \text{ in } x\text{-Gleichung eingesetzt: } 0 - 1 = -3 + 7u \Rightarrow u = \frac{2}{7}$$

Die Flächenstücke verhalten sich zueinander wie 2:5

3. Komplexe Zahlen

a) Fixpunkt hat Eigenschaft $z^* = f(z^*)$:

$$z = i \cdot (z + 1 + i) \Leftrightarrow z - iz = i - 1 \Leftrightarrow z = \frac{i-1}{1-i} = -1; \quad \text{Fixpunktmenge: } \{-1\}$$

b) Berechne und vereinfache $f(f(z))$:

$$f(f(z)) = i \cdot (i(z + 1 + i)) = i \cdot (iz + i - 1 + 1 + i) = i(iz + 2i) = -z - 2$$

$z_{n+2} = z_n \Leftrightarrow -z_n - 2 = z_n \Leftrightarrow z_n = -1$. Es gibt also nur den bereits oben gefundenen Fixpunkt als Lösung.

c) Unter Verwendung von $f(f(z)) = -z - 2$ erhalten wir: $f(f(f(f(z)))) = -(-z - 2) - 2 = z$

Die Gleichung $z_{n+4} = z_n$ hat also ganz \mathbb{C} als Lösungsmenge; unter Ausschluss des Fixpunkts aus a) erhalten wir als Menge der 4-periodischen Punkte: $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

4. Tangente

a) $f(x) = \frac{a}{x}$; $f'(x) = -\frac{a}{x^2}$; Tangentengleichung: $y = -\frac{a}{x_0}x + \frac{2a}{x_0}$.

$$y = 0 \Rightarrow x = \frac{x_0^2 \cdot 2a}{a \cdot x_0} = 2x_0; \quad x = 0 \Rightarrow y = \frac{2a}{x_0}$$

$$\text{Fläche } A = \frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2a}{x_0} = 2a \text{ unabhängig von } x_0!$$

b) $L(x_0) = \sqrt{(2x_0)^2 + \left(\frac{2a}{x_0}\right)^2}$. Minimiere $f(x) = 4x^2 + \frac{4a^2}{x^2}$: ist minimal für $x_0 = \sqrt{a}$

$$\text{Der Kurvenpunkt mit kürzester Tangente ist } (\sqrt{a}|\sqrt{a})$$

5. Vektoren und Kegelschnitte

a) Richtung des Schattens: Projektion von $\vec{\ell}$ auf xy -Ebene. Schatten: $\vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $t \geq 0$

b) $\vec{n}_E = \vec{\ell}$; $M \in E$: Ebenengleichung $3x - 4y - 12z + 144 = 0$

c) $\overrightarrow{MP} \perp z$ -Achse; $\overrightarrow{MP} \perp \vec{\ell}$: $\vec{e}_3 \times \vec{\ell} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Vielfaches von \overrightarrow{MP} ;

$$\text{weil } |\overrightarrow{MP}| = 12 \text{ sein muss: } \overrightarrow{MP} = \frac{12}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9.6 \\ 7.2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P(9.6|7.2|12)$$

d) Auftreffwinkel $\varphi = \left| \arcsin \left(\frac{\vec{\ell} \cdot \vec{e}_3}{|\vec{\ell}| \cdot 1} \right) \right| = \left| \arcsin \left(\frac{-12}{13} \right) \right| = 67.380^\circ$

e) Elliptischer Schatten (vgl. Aufriss-Skizze unten):

(e1) Kleine Halbachse b ist // zu \overrightarrow{MP} und misst daher 12 L.E.

Grosse Halbachse a mit Trigonometrie berechnen: $a = \frac{r}{\sin(\varphi)} = 13$ L.E.

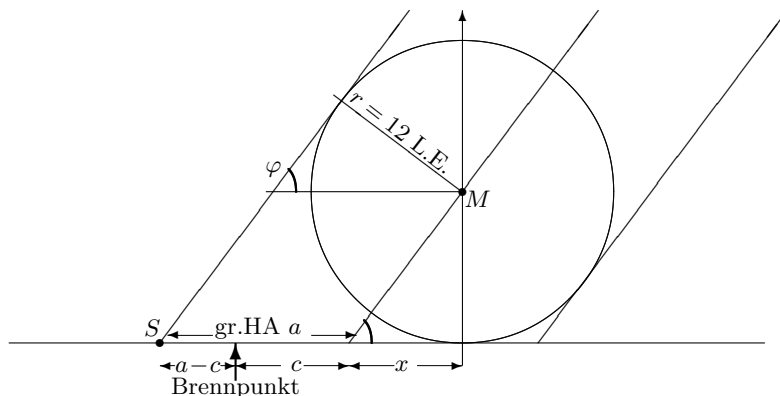
(e2) Abstand des Punktes von $(0|0|0)$: $a + x = a + \frac{r}{\tan \varphi} = a + 5 = 18$ L.E.

$$\text{Mit Geradengleichung aus a): } \overrightarrow{OS} = \frac{18}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}; S(10.8|14.4|0)$$

(e3) Abstand Brennpunkt-Mittelpunkt (lineare Exzentrizität): $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 5$ L.E.

Die Abstände der Brennpunkte von $(0|0|0)$ betragen $x + c$ bzw. $x - c$, also 10 bzw. 0;

Brennpunkte: $F_1(6|-8|0)$ und $F_2(0|0|0)$



Bemerkung: Die gegebene Kugel kann als Dandelin-Kugel in einem Zylinder aufgefasst werden. Daraus folgt dann direkt, dass der Berührungspunkt der Kugel mit der Ellipsenebene, also $(0|0|0)$, der eine der Brennpunkte sein muss.

6. Sinus und Grenzwert

$f(x) = \sin(\sqrt{x})$ hat im Intervall zwei Nullstellen: bei $x = 0$ und bei $x = \pi^2$.

$$f'(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \infty; \alpha = 90^\circ; \quad f'(\pi^2) = \frac{\cos(\sqrt{\pi^2})}{2\sqrt{\pi^2}} = \frac{-1}{2\pi} = -0.159155; \alpha = -9.043061^\circ$$

7. Stochastik

- a) W'keit, dass ein Wurf ungültig ist: $p = \frac{3}{8}$.

$$\left(\frac{3}{8}\right)^k < 0.02 \Rightarrow k \cdot \ln(3/8) < \ln(0.02) \Rightarrow k > \frac{\ln(0.02)}{\ln(3/8)} = 3.98$$

Mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit genügen demnach 4 Würfe.

- b) $P(\geq 40 \text{ ungültig}) = 1 - \sum_{k=0}^{39} \binom{80}{k} \left(\frac{3}{8}\right)^k \left(\frac{5}{8}\right)^{80-k} = 1 - \text{binomcdf}(80, 3/8, 39) = 0.015115$

- c) "Erzeugen einer 'gültigen Augenzahl' nach Annas System" heisst, dass die Ziffern 1, 2, 3, 5, 6 mit Wahrscheinlichkeiten von je $1/5$ auftreten.

Liste aller Würfelfolgen, mittels derer man von "Start" nach "Ziel" kommt:

Folge	4	3-1	2-2	2-1-1	1-3	1-2-1	1-1-2	1-1-1-1	Total
W'keit nach Anna	0	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{625}$	0.1456
W'keit mit L-Würfel	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{1296}$	0.264660

- d) Die 'Augenzahlen' 2 und 3 werden erzeugt, wenn der 2-Fränkler "Zahl" zeigt; die 1, die 5 und die 6 dagegen dann, wenn der 2-Fränkler "Helvetia" zeigt.

"Zahl" trat bei den gültigen W. $55 + 51 = 106$ Mal auf; "Helvetia" $38 + 29 + 37 = 104$ Mal.

Bei drei fairen Münzen ist zu erwarten, dass "Zahl" und "Helvetia" mit dem Häufigkeitsverhältnis 40%:60% auf der Liste stehen.

H_0 : Die W'keit, dass bei einem gültigen Wurf der 2-Fr "Zahl" zeigt, ist $p = 0.4$

Alternative: $p \neq 0.4$ (beidseitiger Test)

$$P(\geq 106 \text{ von } 210 \text{ Würfeln haben } 2\text{-Fr-Zahl}) = \sum_{k=106}^{210} \binom{210}{k} 0.4^k 0.6^{210-k} = 0.001347 < 0.0225$$

Anna hegt ihren Verdacht zu Recht: Es ist sehr unwahrscheinlich, dass mit einer idealen Münze "Zahl" so oft auftritt.