

Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe eine neue Seite!**

Zeit: 4 Stunden.

Hilfsmittel: Formelsammlung Fundamentum
Taschenrechner TI-83, TI83+, TI84+, TI-nSpire (ohne CAS)

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

1. Gegeben ist die Funktion

12 Punkte

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^3 = \frac{1}{4}(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

- Diskutieren Sie den Graphen der Funktion f bezüglich Nullstellen, Extremwerten und Wendepunkten.
- Der Graph von f schneidet die y -Achse im Punkt P . Die Tangente an den Graphen von f im Punkt P umschliesst zusammen mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.
- Der Graph von f umschliesst zusammen mit den Koordinatenachsen eine Fläche A , welche von der in Teil b) beschriebenen Tangente in zwei Teile zerlegt wird. In welchem Verhältnis stehen diese Teile zueinander?
- (Ist auch ohne die Teilaufgaben a), b) oder c) lösbar)
Durch den Schnittpunkt des Graphen von f mit der y -Achse wird eine Gerade g so gelegt, dass sie diesen Graphen in einem weiteren Punkt B berührt. Berechnen Sie die Koordinaten von B .

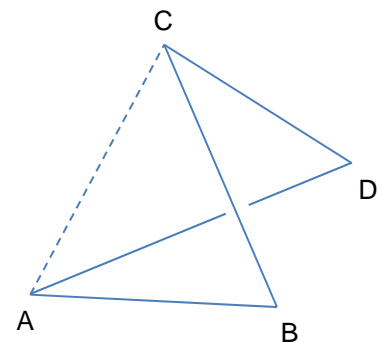
2. Gegeben sind die Punkte $A(3 / -1 / 5)$, $B(4 / y_B / 1)$, $C(2 / 1 / z_C)$ und $D(7 / -2 / 16)$ sowie die Ebene $\mathbb{E}: 4x + 5y + 6z = k$.

10 Punkte

- Die Punkte A , B und C liegen auf der Ebene \mathbb{E} . Bestimmen Sie k , y_B und z_C .

Nun soll das Viereck $ABCD$ untersucht werden.

- Zeigen Sie, dass das Viereck nicht eben ist.
- Bestimmen Sie den Knickwinkel des Vierecks $ABCD$ (Winkel zwischen den Dreiecken ABC und ACD).
- Der Punkt D wird an der Ebene \mathbb{E} gespiegelt. Wie lauten die Koordinaten des Spiegelbildes D^* ?



3. „Wer von Ihnen hat schon mal in einem Geschäft etwas mitlaufen lassen, ohne zu bezahlen?“ – Wenn man diese Umfrage mit einer Gruppe von Leuten durchführt, ist das Resultat kaum verlässlich. Nicht alle, die schon etwas entwendet haben, werden das auch zugeben.

12 Punkte

Um solche Hemmungen zu überwinden, kann folgende Methode angewandt werden:

Jede befragte Person dreht im Geheimen ein Glücksrad so, dass ausser ihr selbst niemand das Ergebnis zu sehen bekommt, und **muss** dann entsprechend antworten. Das Rad ist folgendermassen beschriftet:

<i>Anweisung</i>	<i>Wahrheitsgemäss antworten</i>	<i>Das Gegenteil sagen</i>
Auftretenswahrscheinlichkeit	2/3	1/3

- a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von fünf befragten Personen alle die Wahrheit sagen.
- b) In einer Gruppe von fünf Personen haben genau zwei bereits gestohlen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Befragung alle fünf angeben, nie gestohlen zu haben?

Für die Teilaufgaben c) und d) nehmen wir an, dass 13% aller Befragten schon einmal etwas gestohlen haben.

- c) Eine Person wird zufällig ausgewählt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sagt: „Ja, ich habe schon einmal etwas gestohlen“?
- d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person, die nach dem Drehen des Glücksrades angibt, schon einmal gestohlen zu haben, wirklich schon gestohlen hat?

In der letzten Teilaufgabe sei unbekannt, welcher Anteil p der Befragten schon einmal gestohlen hat.

- e) Nach der Befragung einer sehr grossen Anzahl Personen wird die „Ja“-Wahrscheinlichkeit auf 0.39 geschätzt. Berechnen Sie daraus die Diebstahlquote p .

4. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3 \cdot \cos(x)$.

8 Punkte

Einem Bogen des Graphen von f oberhalb der x -Achse wird ein **T** einbeschrieben; dieses besteht aus einem horizontalen Balken mit der Länge l , dessen Endpunkte auf dem Graphen von f liegen, und einem vertikalen Fuss mit der Höhe h .

Für welche Wahl von l wird für dieses **T** die Gesamtlänge $g = l + h$ minimal, für welche Wahl maximal?

Berechnen Sie jeweils auch die Gesamtlänge g (Rechnerresultate).

5. Gegeben ist die Funktion $f: y = \begin{cases} -x^2 + c & , x < 1 \\ a \cdot e^{-x} & , x \geq 1 \end{cases}$.

12 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Parameter a und c in f so, dass die Funktion an der Nahtstelle differenzierbar ist, d.h. in diesem Punkt ist die Kurve zusammenhängend und ohne Knick.

(Falls Sie a) nicht lösen konnten, rechnen Sie in den beiden folgenden Aufgaben mit der **Ersatzfunktion** f_1 weiter!)

$$f_1: y = \begin{cases} -1.5 \cdot x^2 + 4.5 & , x < 1 \\ 3e \cdot e^{-x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

- b) Wie lautet die Gleichung der Tangente an der Nahtstelle?
 c) Berechnen Sie den Inhalt der gegen rechts unbegrenzten Fläche, welche vom Graphen von f und der x-Achse berandet wird.

6. Die vier Punkte $T_1(0 / 0 / 10)$, $T_2(40 / 0 / 10)$, $T_3(40 / 20 / 10)$ und $T_4(0 / 20 / 10)$ sind die Eckpunkte einer rechteckigen Tischplatte.

13 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene \mathbb{E} , in welcher die Tischplatte liegt.

Eine rechteckige Platte wird so schräg auf den Tisch gestellt, dass zwei benachbarte Eckpunkte P und Q der Platte auf je eine Tischkante zu liegen kommen. Die Platte liegt in der Ebene $\mathbb{G}: 5x + y + 13z - 190 = 0$.

- b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Punkte P und Q, auf den Tischkanten, an welchen die Platte ansetzt.

Im Punkt $A(5 / 9 / 12)$ der angesetzten Platte wird eine Kugel mit vernachlässigbar kleinem Radius losgelassen, welche die Fläche hinunter auf den Tisch rollt.

- c) In welchem Punkt R der Tischplatte trifft sie auf?

(Falls Sie c) nicht lösen konnten, gehen Sie in der folgenden Aufgabe davon aus, dass die Kugel im Punkt $A_1(-4 / 2 / 16)$ losgelassen wurde und im Punkt $R_1(11 / 5 / 10)$ auf dem Tisch aufgetroffen ist.)

Die Kugel rollt anschliessend weiter auf der Tischplatte.

- d) An welchem Punkt fällt sie von der Tischplatte?

