

Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe eine neue Seite!**

Zeit: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung Fundamentum
Taschenrechner TI-83, TI83+, TI84+, TI-nSpire (ohne CAS)

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

- 1) Gegeben sind die Punkte $A(3 / -3 / 0)$, $B(2 / 0 / 8)$, $C(2 / -2 / 4)$ und die Gerade g_a .

10 Punkte

$$g_a : \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$$

- Setzen Sie $a = 1$. Unter welchem Winkel schneidet die Gerade g_1 die xy -Ebene?
- Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene \mathbb{E} , welche durch die Punkte A , B , C gegeben ist.
- Bestimmen Sie die Schnittpunkte X , Y , Z der Ebene \mathbb{E} mit allen drei Koordinatenachsen. Diese Punkte bilden ein Dreieck. Zeichnen Sie dieses Dreieck in ein Koordinatensystem ein.
- Für welchen Wert von a schneidet die Gerade g_a die Ebene \mathbb{E} senkrecht? Bestimmen Sie den Schnittpunkt dieser Geraden mit \mathbb{E} .
- Der Koordinatenursprung O und die Punkte X , Y , Z sind die Eckpunkte einer Pyramide. Für welche Werte von $z \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P(1 / -4 / z)$ im Innern der Pyramide $OXYZ$?



- 2) Für den Bau eines Zelts in Form eines geraden Kreiskegels stehen Stangen der Länge 5m zur Verfügung, welche zur Befestigung der Zeltblache (Mantelfläche des Kegels) dienen.

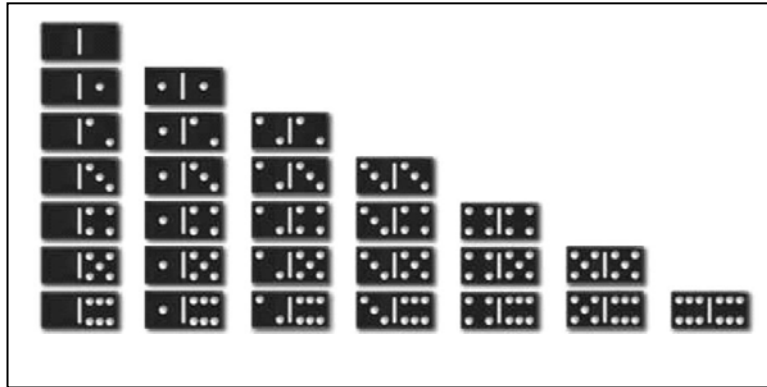
7 Punkte

- Die Höhe des Zelts betrage 4m.
 - Berechnen Sie die kreisförmige Grundfläche des Zelts.
 - Bis zu welcher Entfernung vom „Zentrum“ des Zelts kann ein 1.8m grosser Mensch aufrecht stehen?
- Bestimmen Sie die Höhe des Zelts so, dass das Volumen des Zelts maximal wird.

- 3) In einer Urne befinden sich 28 Dominosteine (siehe Abbildung). Ein Stein mit zwei gleichen Augenzahlen wird Pasch genannt. Diese Augenzahl wird im folgenden auch als „Grösse“ des Paschs bezeichnet.

12 Punkte

So ist  ein Pasch der Grösse 5 und  ein Pasch der Grösse 0.



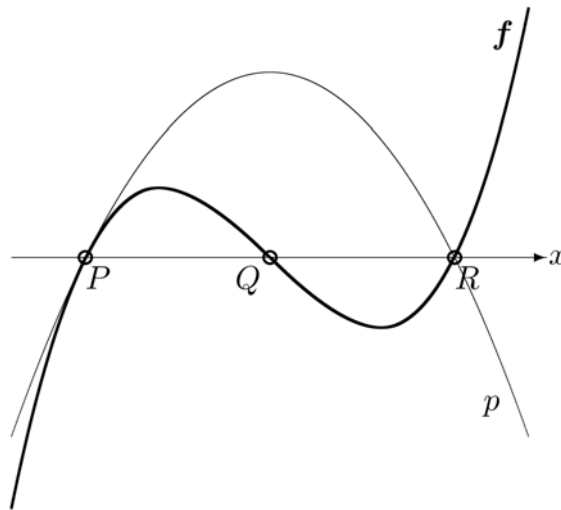
- a) Jemand zieht mit einem Griff 2 Steine zufällig heraus. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:
- Bei beiden Steinen handelt es sich um einen Pasch.
 - Es tritt mindestens einmal die Augenzahl 5 auf.
 - Die Summe aller 4 Augenzahlen ist 3.
 - Es treten 4 verschiedene Augenzahlen auf.

Es werden alle Dominosteine wieder in die Urne zurückgelegt.

- b) Sie dürfen nun solange **ohne Zurücklegen** einen Stein aus der Urne ziehen, bis ein Pasch gezogen wird. Falls die Anzahl der gezogenen Steine die Grösse des Paschs nicht übertrifft, erhalten Sie für jeden gezogenen Stein (inkl. Pasch) einen Franken. Wie viele Franken Einsatz wären bei diesem Spiel festzulegen, so dass es fair ist?
- c) Die 28 Dominosteine werden auf den Boden geworfen. Dabei landen 18 mit Bild nach oben. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für ein solches oder ein noch extremeres Resultat (also noch öfters mit Bild nach oben), wenn angenommen wird, dass ein Dominostein mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% mit Bild nach oben landet?

- 4) Der Graph der Funktion $y = f(x) = x^3 - x$ (in der Abbildung fett gezeichnet) schneidet die x -Achse in den drei Punkten P, Q und R.

| |
|-----------|
| 12 Punkte |
|-----------|



- a) Finden Sie die Koordinaten von P, Q und R und zeichnen Sie die y -Achse in die Skizze ein.
- b) Geben Sie die Gleichung derjenigen Parabel p an, welche den Graphen von f im Punkt P **berührt** und in R schneidet (dünn gezeichnet).

(Falls Sie b) nicht lösen konnten, rechnen Sie mit dem **falschen** Resultat $y = p(x) = 1.5 - 1.5x^2$ weiter!)

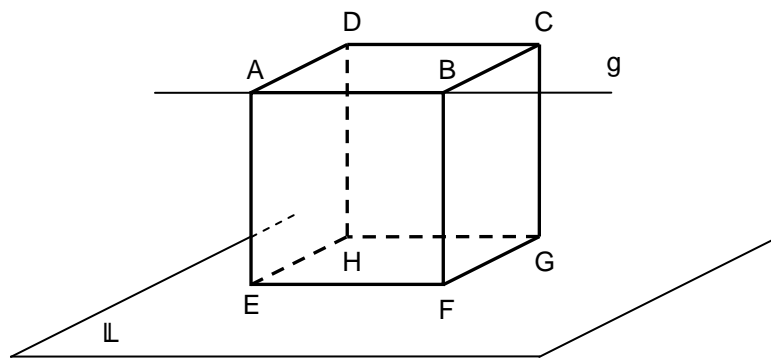
- c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Gebiets G, das durch die beiden Graphen eingeschlossen ist.
- d) Für welches x ist der vertikale Abstand zwischen den das Gebiet G begrenzenden Kurven am grössten?
- e) Sei t diejenige Tangente an den Graphen von f , welche den Graphen an einer Stelle zwischen P und Q berührt und die Steigung $-\frac{1}{4}$ hat. Geben Sie die Geradengleichung von t an.
- f) Wie viele % der Fläche von G liegen **oberhalb** der in e) gefundenen Tangente t ?

- 5) Die Gerade g durch die Punkte $A(3 / 2 / 0)$ und $P(5 / 0 / 1)$ sowie die Gerade h sind gegeben.

10 Punkte

$$h: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Zeigen Sie, dass g und h senkrecht zueinander verlaufen und sich nicht schneiden.
- Alle Geraden, die zur Geraden g parallel sind und die Gerade h schneiden bilden eine Ebene \mathbb{L} . Bestimmen Sie die Koordinatengleichung von \mathbb{L} und den Abstand der Geraden g von \mathbb{L} .
- A ist Eckpunkt eines Würfels $ABCDEFGH$ (vergleiche Skizze), dessen Kante AB auf g liegt und dessen Fläche $EFGH$ sich in \mathbb{L} befindet. Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte E , B und H für eine der möglichen Lösungen.



- 6) Gegeben sind die Funktionen $y = f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ und $y = g(x) = e^{-x}$.

12 Punkte

- Bestimmen Sie von der Funktion f die Nullstellen und Extrema (ohne Nachweis der Art) und zeichnen Sie den Graphen.
- Berechnen Sie die Schnittpunkte und einen der Schnittwinkel der Graphen von f und g .
- Die Stammfunktion zur Funktion f hat die Form $F(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x}$. Bestimmen Sie die Koeffizienten a , b , c .
- Berechnen Sie den Inhalt der gegen rechts unbegrenzten Fläche im ersten Quadranten, welche von den Graphen von f und g und der x -Achse berandet wird.