

Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe eine neue Seite!**

Wenn nicht anders verlangt, geben Sie Rechnerresultate auf 4 signifikante Stellen an.

Zeit: 4 Stunden.

Hilfsmittel: Formelsammlung Fundamentum
Taschenrechner TI-83, TI83+, TI84+

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben angeschrieben.
Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

1. Gegeben sind die beiden Funktionen

15 Punkte

$$y = f(x) = x^2 \text{ und } y = g(x) = \sqrt{x}$$

- Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.
- Unter welchen Winkeln schneiden sich die beiden Graphen in den Schnittpunkten?
- Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen eingeschlossen wird.
- Jeder dieser Graphen umrandet zusammen mit der x -Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = b$ eine Fläche. Für welchen Wert von b werden diese Flächen gleich gross?
- Spiegeln Sie den Graphen der Funktion g an der Vertikalen mit der Gleichung $x = 2$. Wie lautet die Gleichung der Funktion h , welche die gespiegelte Kurve beschreibt? Beschreiben Sie in Worten die Schritte Ihres Lösungsweges.
- (Ist auch ohne Teilaufgabe e) lösbar!)
Die Fläche zwischen den Graphen von g , h und der x -Achse wird um die x -Achse rotiert. Welches Volumen hat dieser Körper?

2. Gegeben sind die beiden Geraden

12 Punkte

$g: A(1/5 / -3)$, $B(2/3 / 0)$ und $h: C(2/3 / 3)$, $D(3/1 / 5)$.

- Zeigen Sie, dass sich die Geraden in einem Punkt schneiden. In welchem?
Zwei Punkte G und H werden betrachtet, welche sich beide mit gleich bleibender Geschwindigkeit auf je einer der Geraden bewegen:
 G befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt A , zum Zeitpunkt $t = 1$ im Punkt B ;
 H befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt C , zum Zeitpunkt $t = 1$ im Punkt D .
- Welche Koordinaten haben G und H zum Zeitpunkt $t = 2$?
Welchen Abstand haben G und H zum Zeitpunkt $t = 10$?
- Zu welchem Zeitpunkt t haben G und H den Abstand 3?
- Zu welchem Zeitpunkt t sind sich G und H am nächsten?
Wie gross ist dann ihr Abstand?

3. (Für diese Aufgabe darf der Rechner uneingeschränkt benutzt werden.)

10 Punkte

Um einer neuen Ausgangsbekannntschaft seine Mailadresse zuzustecken, musste Quentin rasch handeln: er riss einen Streifen vom erstbesten Zettel ab, der ihm in die Hände kam. Später stellt sich heraus, dass der benutzte Zettel sein mit 6 Kreuzchen ausgefüllter Lottoschein war. Der Lottoschein, der ursprünglich Felder mit den Zahlen 1 bis 45 aufwies, sieht jetzt so aus wie auf nebenstehendem Bild:

3	4	5	6
9	X	11	12
15	16	17	18
X	22	23	24
27	28	X	30
33	X	35	36
39	40	41	42
45			

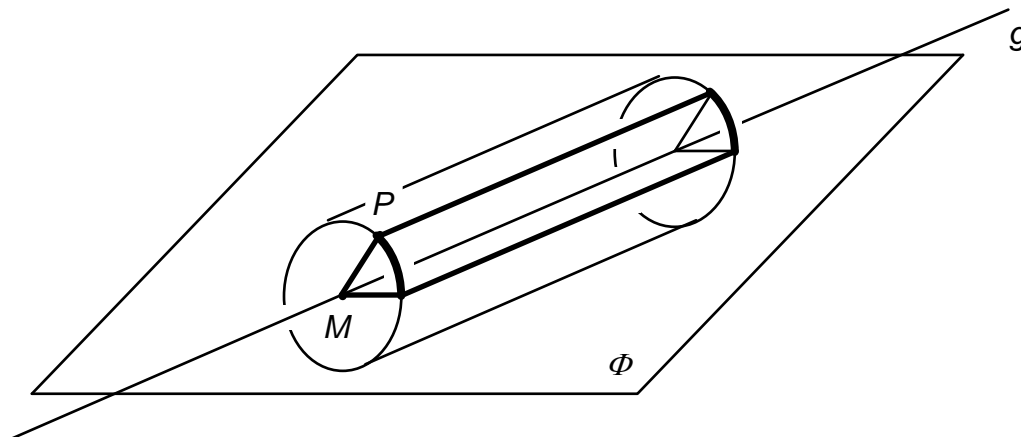
- a) Quentin hat vergessen, wo er die restlichen beiden Kreuzchen gesetzt hatte. Wie viele Möglichkeiten sind denkbar?
- b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei der Ziehung von sechs Gewinnzahlen genau die vier hier angekreuzten Zahlen und noch zwei aus dem nicht sichtbaren Bereich gezogen werden?
- c) Quentin erfährt die Gewinnzahlen und vergleicht sie mit dem oben dargestellten Überrest seines Lottoscheins: Im sichtbaren Bereich hat er alles richtig ausgefüllt!
Berechnen Sie den Gewinn, den er im Mittel erwarten darf, wenn 4 Richtige Fr. 50.–, 5 Richtige Fr. 2500.– und 6 Richtige Fr. 900'000.– einbringen (und wenn er die Quittung, die er am Kiosk bekommen hat, noch findet...).
- d) Die Statistik von Swisslos nennt jeweils die am seltensten gezogene Lottozahl. Im Moment ist das die „14“, die bei den bisher durchgeführten 1635 Ziehungen erst 192 Mal aufgetreten ist.
Berechnen Sie, mit welcher durchschnittlichen Häufigkeit eine Zahl bei dieser Anzahl Ziehungen zu erwarten ist.
Berechnen Sie ausserdem die Wahrscheinlichkeit, dass die „14“ so selten oder noch seltener auftritt.

4. Gegeben sind die Ebene $\Phi: 2x - 2y + z + 10 = 0$,

12 Punkte

der Punkt $P(3/1/4)$ und die Gerade $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$.

- a) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene Φ verläuft.
 b) Die Gerade g ist die Achse eines geraden Kreiszylinders. Der Punkt P befindet sich auf der Peripherie des Grundkreises dieses Zylinders:



Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M dieses Grundkreises.

- c) Der Zylinder hat die Höhe $h = 18$. Wir betrachten den in der Skizze fett markierten Zylindersektor. Dessen eine Mantellinie liegt in Φ , die andere verläuft parallel dazu durch P . Berechnen Sie das Volumen dieses Sektors.
5. Gegeben sind die Funktionen $y = f_k(x) = e^{kx} + e^{-x}$ ($k > 0$)

15 Punkte

- a) In dieser Teilaufgabe sei $k = 2$.
 Bestimmen Sie allfällige Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte des Graphen von f_2 und zeichnen Sie den Graphen von f_2 .
- b) Der Punkt $P(0/?)$ liegt auf dem Graphen von f_k .
 Für welches k geht die Tangente an den Graphen von f_k im Punkt P durch den Punkt $Q(-1/0)$?
- c) Bestimmen Sie den Inhalt I_k der Fläche, welche vom Graphen von f_k , der Geraden $g_k: y = -\frac{2}{k} \cdot x$, der y -Achse und der Vertikalen mit der Gleichung $x = 1$ begrenzt wird, in Abhängigkeit von k .
 Für welches k ist dieser Flächeninhalt minimal?
 (Die Art des Extremums muss nicht nachgewiesen werden.)