

Mathematik

Verwenden Sie bitte **für jede Aufgabe eine neue Seite!**

Hilfsmittel: Formelsammlung Fundamentum
Taschenrechner TI-83 oder TI-84

Bewertung: Die erreichbaren Punktzahlen sind bei den Aufgaben
angeschrieben.

Für die Note 6 ist nicht die volle Punktzahl erforderlich.

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung

12 Punkte

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{45}{4}x .$$

- Diskutieren Sie den Graphen von f bezüglich Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Graphen.
- Bestimmen Sie denjenigen vom Nullpunkt verschiedenen Punkt $P(u, f(u))$ auf dem Funktionsgraphen so, dass die Tangente in diesem Punkt durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht.
- Welchen Inhalt besitzt die Fläche, die vom Graphen von f und der in b) bestimmten Tangente (im 1. Quadranten) eingeschlossen wird?

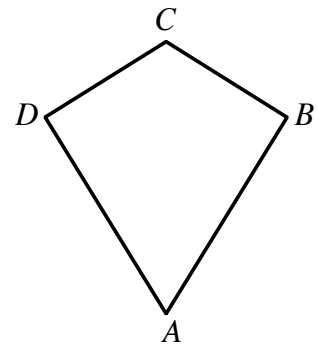
Alternative für Aufgabe c):

Falls Sie den Aufgabenteil b) nicht lösen können, so berechnen Sie den Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der Geraden g , welche durch den Koordinatenursprung O und den Hochpunkt des Graphen von f bestimmt wird.

2. Ein Drachenviereck ist ein Viereck, bei dem je zwei anliegende Seiten gleich lang sind und die Eckpunkte in einer Ebene liegen.

12 Punkte

Im vorliegenden Drachenviereck ABCD gilt (vgl. Skizze):
 $\overline{AB} = \overline{AD}$ und $\overline{BC} = \overline{CD}$, ferner sind die Punkte
 $B(-2, 1, 9)$ und $D(6, 5, 1)$ gegeben.



- a) Die Ecke A dieses Vierecks liegt auf der Geraden

$$g: \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \text{ Bestimmen Sie A.}$$

Falls Sie a) nicht lösen können, rechnen Sie weiter mit $A(-6, 11, 1)$.

- b) Die Ecke C liegt in der Ebene E: $3x - 4y + 2z = 20$. Bestimmen Sie C.
 c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Drachenvierecks.
 d) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene F, in der das Drachenviereck liegt.
 e) Das Drachenviereck ABCD wird um 90° um die Achse AC gedreht. Es entsteht ein neues Drachenviereck AB^*CD^* . Bestimmen Sie B^* und D^* .

3. Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y = f(x) = a \cdot e^{2x} + b$ verläuft durch die Punkte $O(0, 0)$ und $P(\frac{1}{2}, e)$.

8 Punkte

- a) Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b exakt.
 b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die x-Achse?
 c) O und P sind gegenüberliegende Eckpunkte eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind. In welchem Verhältnis teilt der Graph von f diese Rechtecksfläche? Bestimmen Sie dieses Verhältnis exakt.

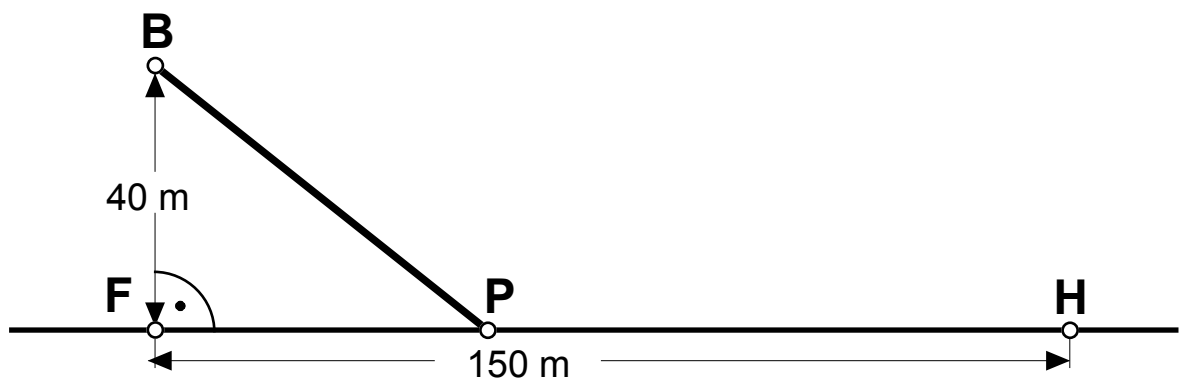
4. Ein Kartenspiel enthält rote, blaue, grüne und gelbe Karten.
 Von jeder Farbe gibt es je eine mit den Ziffern 0 bis 9.
 Das Kartenspiel besteht also aus 40 Karten.

12 Punkte

- 4.1. Sie ziehen zwei Karten zufällig aus dem Kartenspiel. Es sind eine rote und eine blaue. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben sie die gleiche Ziffer?
- 4.2. Aus dem vollständigen Kartenspiel wählen Sie vier Karten aus und legen sie in einer Reihe auf den Tisch.
 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
 a) Die ausgewählten Karten haben die gleiche Farbe.
 b) Alle vier Farben wurden gezogen.
 c) Es sind genau zwei blaue Karten unter den ausgewählten.
 d) Die ausgewählten Karten haben unterschiedliche Farbe, aber gleiche Ziffern.
- 4.3. Jemand schlägt folgendes Spiel vor: Sie dürfen nacheinander Karten ziehen, ohne sie jeweils zurückzulegen, bis eine Farbe das zweite Mal vorkommt. Dann ist das Spiel zu Ende.
 Falls Sie die Anzahl Züge richtig vorausgesagt haben, erhalten Sie Fr. 20.-.
 Der Einsatz beträgt Fr. 5.- und ist im Voraus zu bezahlen.
 Auf wieviele Züge werden Sie setzen? Mit welchem mittleren Gewinn können Sie dann bei diesem Spiel rechnen?

5. Es soll eine Wasserrinne von einem Brunnen B zum Bauernhof H gebaut werden. Der Bauernhof liegt an einer Strasse. Der Brunnen hat den Abstand $BF = 40$ m von der Strasse. Ferner ist die Distanz $FH = 150$ m bekannt (vgl. Skizze).

8 Punkte



Der Bauer entscheidet sich dazu, die Wasserrinne zuerst schräg über das Feld in Richtung Strasse zu bauen (bis zum Punkt P) und von dort weg entlang der Strasse bis zum Hof H.

Die Verlegung über das Feld kostet 60 Franken pro Meter, entlang der Strasse 50 Franken pro Meter.

Wie weit vom Bauernhof muss der Punkt P entfernt sein, damit der Bau der Wasserrinne möglichst günstig wird?